This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

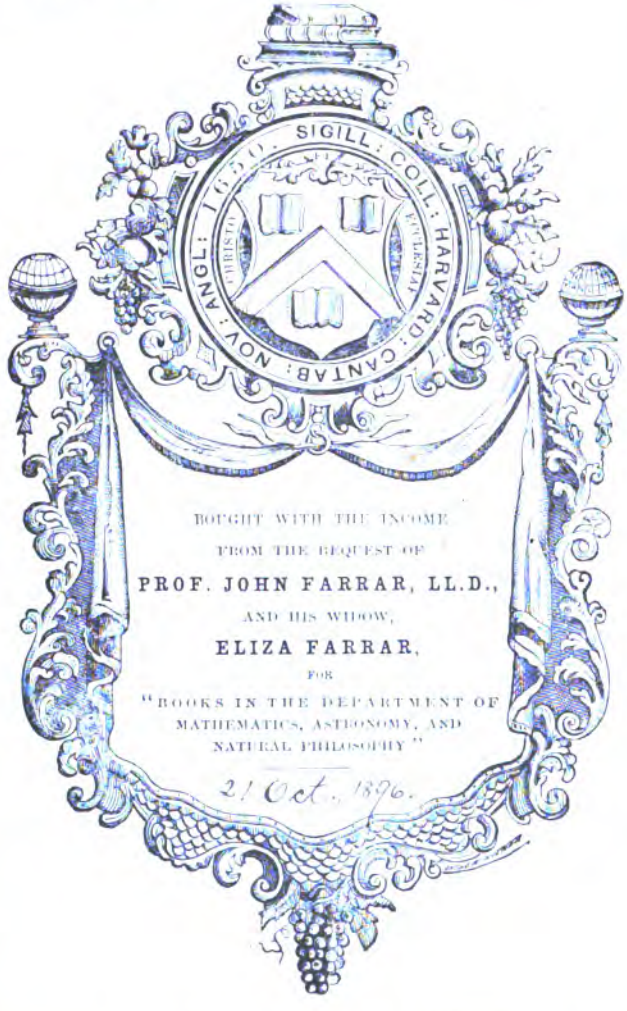
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math 300 s.1



BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"

21 Oct. 1896.

SCIENCE CENTER LIBRARY

Einführung

in die

mathematische Behandlung

der Naturwissenschaften.

Kurzgefasstes
Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung mit
besonderer Berücksichtigung der Chemie.

Von

W. Nernst,
o. ö. Professor d. physikal. Chemie
a. d. Univers. Göttingen.

A. Schönflies,
a. o. Professor der Mathematik
a. d. Univers. Göttingen.

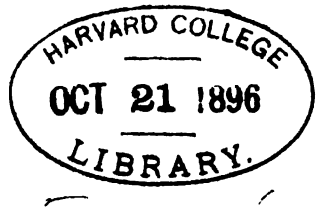
Mit 61 im Text befindlichen Figuren.

MÜNCHEN & LEIPZIG.
Wissenschaftlicher Verlag von Dr. E. Wolff.
1895.

~~VI 78974~~
Math 30.2.25

HARVARD COLLEGE
OCT 21 1896
LIBRARY.

Farrar fund



Herrn

Professor Dr. Wilhelm Ostwald

in Leipzig

freundlichst zugeeignet von

DEN VERFASSERN.

Vorwort.

Zweck des vorliegenden Buches ist es, Jüngern der Naturwissenschaften das Studium der höheren Mathematik zu erleichtern; wir haben versucht, in knapper Form die für naturwissenschaftliche Rechnungen wichtigsten Kapitel der Infinitesimalrechnung zusammenzustellen und durch fortwährende Anwendung der mathematischen Lehrsätze auf naturwissenschaftliche Probleme dem Verständnis nach Möglichkeit entgegenzukommen.

Allgemein kann man sagen, dass eine naturwissenschaftliche Disziplin die Methoden der höheren Mathematik zur Erweiterung und Vertiefung der durch direkte Beobachtungen gewonnenen Ergebnisse um so häufiger zu Rate zieht, je weitere Fortschritte die theoretische Bearbeitung der unmittelbaren Versuchsresultate macht. Im besonderen beginnt gerade die neuere Entwicklung der theoretischen Chemie sich die Methoden der höheren Mathematik nutzbar zu machen. So bemerkt z. B. Herr H. Jahn in der Vorrede zu dem soeben erschienenen Grundriss der Elektrochemie: »Auch die Chemiker müssen sich allmählich an den Gedanken gewöhnen, dass ihnen die theoretische Chemie ohne die Beherrschung der Elemente der höheren Analysis ein Buch mit sieben Siegeln bleiben wird. Ein Differential- oder Integralzeichen muss aufhören, für den Chemiker eine unverständliche Hieroglyphe zu sein, ... wenn er sich nicht

der Gefahr aussetzen will, für die Entwickelung der theoretischen Chemie jedes Verständnis zu verlieren. Denn es ist ein fruchtloses Bemühen, in seitenlangen Auseinandersetzungen halb klar machen zu wollen, was eine Gleichung dem Eingeweihten in einer Zeile sagt.«

Die Auswahl des Stoffes geschah hauptsächlich nach dem Gesichtspunkte, durch das Gebotene das Studium der physikalischen Chemie wie auch der Elemente der theoretischen Physik zu erschliessen. Allein auch der Physiologe, Botaniker, Mineraloge etc. wird sich für die mathematischen Bedürfnisse seines Faches daraus hinreichend orientieren können.

Wer durch die Lektüre unserer Schrift sich zur Vertiefung oder Erweiterung seiner mathematischen Kenntnisse angeregt fühlt, den möchten wir auf die soeben erschienene siebente Auflage des Lehrbuchs der Differential- und Integralrechnung von Kiepert-Stegemann (Hannover 1895) oder auf dasjenige von Serret (deutsch von Harnack, Leipzig 1889) hinweisen.

Die Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.
Die Elemente der analytischen Geometrie.

Seite

§ 1. Die graphische Darstellung 1
§ 2. Der Koordinatenbegriff 3
§ 3. Das Grundprinzip der analytischen Geometrie 5
§ 4. Die Gleichung des Kreises 7
§ 5. Die Gleichung der Parabel 9
§ 6. Die Gleichung der geraden Linie 11
§ 7. Das Gesetz von Gay-Lussac 15
§ 8. Aufgaben über die gerade Linie 16
§ 9. Zwei gerade Linien 18
§ 10. Die Gleichung der Ellipse 20
§ 11. Aufgaben über die Ellipse. Die Directrix 22
§ 12. Die Gleichung der Hyperbel 24
§ 13. Die Directrix der Hyperbel 26
§ 14. Die gleichseitige Hyperbel und ihre Asymptotengleichung 27
§ 15. Die Transformation der Koordinaten 29
§ 16. Die Gleichung von van der Waals 31
§ 17. Die Gleichung der Dissoziationsisotherme 34
§ 18. Die Polarkoordinaten 35
§ 19. Die Spirale des Archimedes 37

Zweites Kapitel.
Die Grundbegriffe der Differentialrechnung.

§ 1. Die Prinzipien der höheren Mathematik und die naturwissenschaftliche Vorstellungsart 39
§ 2 Bewegung auf der Parabel 43
§ 3. Der freie Fall 45
§ 4. Die Wärmeausdehnung eines Stabes 48
§ 5. Der Differentialquotient 49
§ 6. Die physikalische Bedeutung des Differentialquotienten 51
§ 7. Der Funktionsbegriff 52
§ 8. Allgemeine Vorschrift für die Bildung des Differentialquotienten 54

Seite

Drittes Kapitel.

Differentiation der einfachen Funktionen.

§ 1. Der binomische Lehrsatz 58
§ 2. Der Differentialquotient von x^n 59
§ 3. Die trigonometrischen Funktionen 60
§ 4. Der Differentialquotient von $\sin x$ und $\cos x$ 63
§ 5. Der Differentialquotient von Summe und Differenz 67
§ 6. Der Differentialquotient des Produkts 69
§ 7. Der Differentialquotient des Quotienten 70
§ 8. Der Logarithmus und sein Differentialquotient 73
§ 9. Die Exponentialfunktion 79
§ 10. Die Kreisfunktionen 81
§ 11. Das Differential 82
§ 12. Das Differential einer Potenz für beliebige Exponenten 87
§ 13. Differentiation der Funktionen von Funktionen 89
§ 14. Stetigkeit und Unstetigkeit 92

Viertes Kapitel.

Die Integralrechnung.

§ 1. Die Aufgabe der Integralrechnung 96
§ 2. Der Integralbegriff 100
§ 3. Die Grundformeln der Integralrechnung 104
§ 4. Die geometrische und physikalische Bedeutung der Integrationskonstanten . 105
§ 5. Integration von Summe und Differenz 110
§ 6. Die Methode der teilweisen Integration 111
§ 7. Integration durch Einführung neuer Variabeln 113
§ 8. Zerlegung in Partialbrüche 118

Fünftes Kapitel.

Anwendungen der Integralrechnung.

§ 1. Anziehung eines Stabes 126
§ 2. Hypsometrische Formel 128
§ 3. Erkaltungsgesetz von Newton 129
§ 4. Maximaltemperatur einer Flamme 131
§ 5. Arbeitsleistung bei isothermer Ausdehnung eines idealen Gases 133
§ 6. Arbeitsleistung bei isothermer Ausdehnung eines stark komprimierten Gases 134
§ 7. Arbeitsleistung bei isothermer Ausdehnung eines sich dissoziierenden Gases 135
§ 8. Berechnung des Reaktionsverlaufs vollständig verlaufender Reaktionen . . 137
§ 9. Verlauf unvollständiger Reaktionen 139

Sechstes Kapitel.

Bestimmte Integrale.

§ 1. Die Fläche der Parabel 144
§ 2. Die Fläche einer beliebigen Kurve 147

Seite

§ 3. Das bestimmte Integral 150
§ 4. Die Fläche der Ellipse und Hyperbel 152
§ 5. Der Inhalt der Kugel und des Rotationsparaboloids 154
§ 6. Rechnungsregeln für bestimmte Integrale 156
§ 7. Bestimmte und unbestimmte Integrale 158
§ 8. Mehrfache Integrale 160

Siebentes Kapitel.

Die höheren Differentialquotienten und die Funktionen mehrerer Variabeln.

§ 1. Definition der höheren Differentialquotienten und Ableitungen 164
§ 2. Die höheren Ableitungen der einfachsten Funktionen 165
§ 3. Physikalische Bedeutung der zweiten Ableitung 167
§ 4. Geometrische Bedeutung des zweiten Differentialquotienten 169
§ 5. Die höheren Differentiale 171
§ 6. Die partiellen Differentialquotienten und das totale Differential 172
§ 7. Differentiation von Funktionen, die aus mehreren Funktionen einer Variabeln zusammengesetzt sind 178
§ 8. Der planare und kubische Ausdehnungskoeffizient 179
§ 9. Die höheren partiellen Differentialquotienten 182
§ 10. Differentiation unentwickelter Funktionen 183
§ 11. Die Brennpunktseigenschaften der Parabel 184
§ 12. Die Brennpunktseigenschaften der Ellipse 187
§ 13. Die Asymptoten der Hyperbel 189

Achtes Kapitel.

Unendliche Reihen und Taylor'scher Satz.

§ 1. Beispiele unendlicher Reihen 192
§ 2. Die geometrische Reihe 193
§ 3. Allgemeine Sätze über Konvergenz der Reihen 194
§ 4. Schnelligkeit der Konvergenz 197
§ 5. Anwendung auf die Reihe für e 198
§ 6. Die Reihe von MacLaurin 200
§ 7. Die Reihen für e^x, sin x und cos x 202
§ 8. Die Reihe von Taylor 205
§ 9. Die logarithmische Reihe 207
§ 10. Die binomische Reihe 209
§ 11. Die Reihe für tg x 210
§ 12. Integration durch Reihen 211
§ 13. Ermittelung unbestimmter Werte 215
§ 14. Rechnen mit kleinen Grössen 222

Neuntes Kapitel.

Theorie der Maxima und Minima.

§ 1. Bedingungen für ein Maximum oder Minimum 227
§ 2. Die Wendepunkte der Kurven 229

Seite
§ 3. Das Reflexionsgesetz 232
§ 4. Das Brechungsgesetz 234
§ 5. Das Minimum der Wärmeintensität 235
§ 6. Beispiele aus der Technik 236
§ 7. Fehlerrechnung 240

Zehntes Kapitel.

Auflösung numerischer Gleichungen.

§ 1. Graphische Deutung der Gleichungen 246
§ 2. Die Newton'sche Annäherungsmethode 247
§ 3. Trennung der Wurzeln 250
§ 4. Zahl der reellen Wurzeln einer Gleichung 253
§ 5. Transcendente Gleichungen 254

Elftes Kapitel.

Differentiation und Integration empirisch festgestellter Funktionen.

§ 1. Differentiation 256
§ 2. Integration 261

Zwölftes Kapitel.

Beispiele aus der Mechanik und Thermodynamik.

§ 1. Ungedämpfte Schwingungen 265
§ 2. Gedämpfte Schwingungen 268
§ 3. Berechnung der mittleren Weglänge der Gasmolekülе nach Clausius . . . 275
§ 4. Anwendungen des ersten Wärmesatzes. Veränderung von Reaktionswärmen mit der Temperatur 280
§ 5. Verdünnungswärme der Schwefelsäure 281

Uebungsaufgaben.

§ 1. Differentiation entwickelter Funktionen 284
§ 2. Höhere Differentialquotienten, Differentiation der unentwickelten Funktionen und der Funktionen mehrerer Variabeln 286
§ 3. Werte, die unter unbestimmter Form erscheinen 287
§ 4. Unbestimmte Integrale 288
§ 5. Bestimmte Integrale 290
§ 6. Maxima und Minima 291

Anhang. — Formelsammlung.

§ 1. Potenzen und Wurzeln 293
§ 2. Logarithmen 294

Seite

§ 3. Die trigonometrischen Formeln 296
§ 4. Reihen und Summenformeln 298
§ 5. Permutationen 300
§ 6. Auflösung der quadratischen Gleichung und der Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten 301
§ 7. Formeln für Flächen und Körper 302
§ 8. Näherungsformeln für das Rechnen mit kleinen Grössen 303
§ 9. Die einfachen Formeln der Differentialrechnung 304
§ 10. Die einfachsten Formeln der Integralrechnung 304
§ 11. Reihenentwickelungen 305

Sachregister 307

Erstes Kapitel.

Die Elemente der analytischen Geometrie.

§ 1. Die graphische Darstellung.

In den letzten Jahrzehnten haben sich die graphischen Methoden mehr und mehr zu einem ebenso allgemeinen, wie nützlichen Hilfsmittel der Forschung herausgebildet. So pflegt man sich in den theoretischen, wie in den beschreibenden Naturwissenschaften, in der Geographie, in der Meteorologie und Physiologie, in der Sozialwissenschaft und Statistik, kurz überall, wo es sich um Gesetze oder Regeln handelt, die an Zahlen gebunden sind, ihrer mit grossem Vorteil zu bedienen. Der besondere Wert, den sie beanspruchen dürfen, gründet sich darauf, dass sie das Zahlenmaterial einer Tabelle durch ein geometrisches Bild ersetzen und auf diese Weise den Zusammenhang der Zahlen dem Auge unmittelbar zur Anschauung bringen. Ein Beispiel wird genügen, um ihre Bedeutung und Verwendbarkeit klar hervortreten zu lassen.

Es handele sich darum, die graphische Darstellung des Boyle-Mariotte'schen Gesetzes zu geben. Das Mariotte'sche Gesetz giebt an, in welchem Verhältnis Druck und Volumen eines Gases sich ändern, wenn alle übrigen Eigenschaften desselben konstant erhalten werden.

Befindet sich eine und dieselbe Gasmenge einmal unter dem Druck p, ein anderes Mal unter dem Druck p_1, und sind v resp. v_1 die entsprechenden Volumina, so ist v und v_1 umgekehrt proportional zu p und p_1, d. h. es besteht die Proportion:

$$1) \quad v : v_1 = p_1 : p$$

resp. die Gleichung:

$$2) \quad p\,v = p_1\,v_1.$$

Auf Grund dieser Gleichung erhält man die gesuchte graphische Darstellung folgendermassen.

Wir bestimmen zunächst eine Reihe zusammengehöriger Werte von Druck und Volumen. Setzen wir im besondern fest, dass das Volumen v_1, das dem Druck $p_1 = 1$ entspricht, die Grösse $v_1 = 1$ besitze, so geht die Gleichung 2) in

$$p\,v = 1$$

über und wir erhalten aus ihr folgende Tabelle entsprechender Werte von p und v:

Ist $p = 0{,}1$,	so ist $v = 10$
$p = 0{,}2$	$v = 5$
$p = 0{,}5$	$v = 2$
$p = 1$	$v = 1$
$p = 2$	$v = 0{,}5$
$p = 4$	$v = 0{,}25$
u. s. w.	u. s. w.

Wir ziehen jetzt (Fig. 1) eine beliebige Gerade, und tragen auf ihr von einem Punkte O aus Strecken ab, deren Längen gleich den bezüglichen Werten von p sind, also gleich 0,1, 0,2, 0,5, 1, 2, 4 u. s. w. und errichten in den Endpunkten von ihnen Lote, deren Längen gleich den zugehörigen Werten von v sind, also resp. gleich 10, 5, 2, 1, 0,5, 0,25 u. s. w. Verbinden wir alsdann die Endpunkte dieser Lote durch einen Kurvenzug, so ist die so erhaltene Kurve das graphische Bild des Mariotte'schen Gesetzes. Es versteht sich von selbst, dass wir, um den genauen Verlauf der Kurve zu erhalten, eine grosse Reihe von Punkten konstruieren müssen, die auf ihr liegen. Wir bemerken noch, was freilich an dieser Stelle noch nicht gezeigt werden kann, dass unsere Kurve ein Stück einer Hyperbel ist.*)

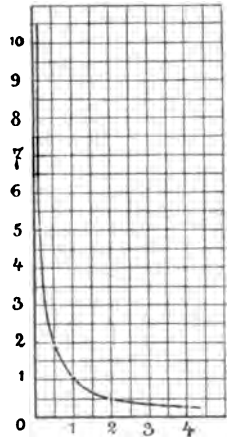


Fig. 1.

Es bedarf kaum des Hinweises, worin der Vorteil der graphischen Darstellung besteht. Die Kurve zeigt dem Auge unmittelbar, in welchem Verhältnis sich Druck und Volumen ändern; sie zeigt, dass wenn der Druck sehr klein wird, das Volumen unverhältnismässig schnell wächst,

*) Um das graphische Bild eines Gesetzes zu zeichnen, bedient man sich zweckmässig des im Handel käuflichen Millimeter- oder Koordinatenpapiers. Um die möglichste Genauigkeit zu erzielen, hat Regnault die von ihm beobachteten Dampfdruckkurven des Wassers auf Kupfertafeln aufgezeichnet. Vgl. darüber die Mémoires der Pariser Akademie, Bd. 21, S. 476 (1847).

dass umgekehrt, wenn der Druck sehr gesteigert wird, die Abnahme des Volumens sehr langsam vor sich geht u. s. w. u. s. w.

Das eben erörterte Verfahren, die Kurve des Boyle-Mariotte'schen Gesetzes zu zeichnen, ist, wenn wir ein genaues Bild von ihr haben wollen, ziemlich mühsam und umständlich. Wir bedürfen dazu einer grossen Reihe zusammengehöriger Werte von p und v. Es giebt aber noch eine zweite, bei weitem einfachere Methode. Diese Methode fliesst aus dem Lehrgebäude der analytischen Geometrie. In der analytischen Geometrie wird nämlich direkt gezeigt, dass das Gesetz, welches die zu einander gehörigen Zahlenwerte von Druck und Volumen verbindet, und das in der Gleichung 2) seinen Ausdruck hat, durch das Bild einer Hyperbel dargestellt wird; sie lehrt uns mit einem Schlage und in voller Allgemeinheit, was wir empirisch nur durch ein langwieriges Verfahren erhalten. Wir fügen hinzu, dass das gleiche von jedem naturwissenschaftlichen Gesetz gilt, in dem Mass und Zahl eine Rolle spielen.

§ 2. Der Koordinatenbegriff.

Der Grundgedanke der analytischen Geometrie ist der nämliche, auf den sich die Methode der graphischen Darstellung aufbaut. Er läuft auf den Kunstgriff hinaus, Zahlengruppen geometrisch durch Punkte darzustellen. Diesen Kunstgriff erdacht und darauf ein konsequentes Lehrgebäude aufgeführt zu haben, ist das Verdienst des Begründers der analytischen Geometrie, das Verdienst von René Descartes (1596—1650). In einer kleinen Schrift, die den einfachen Titel führt: »Géométrie«, hat er seine Methoden zum ersten Mal zusammengestellt und im Jahre 1637 veröffentlicht.*) Mit diesen Methoden müssen wir uns nunmehr bekannt machen.

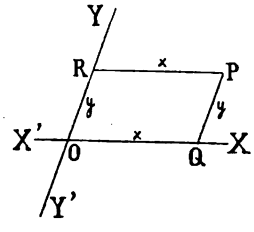


Fig. 2.

Wir ziehen in der Ebene zwei gerade unbegrenzte Linien, die einen beliebigen Winkel mit einander einschliessen mögen (Fig. 2). Ihren Schnittpunkt nennen wir O, die Linien selbst sollen durch $X'OX$ und YOY' bezeichnet werden. Wir nehmen ferner einen Punkt P in der Ebene der Zeichnung beliebig an, und ziehen durch P je eine Parallele zu den Geraden OX und OY, die auf ihnen die Strecken

*) Die oben erwähnte Schrift von Descartes ist im Jahr 1886 neu herausgegeben worden (Paris, Hermann), im Jahr 1894 in deutscher Uebersetzung von L. Schlesinger.

OQ und OR abschneiden. Die Längen dieser Strecken mögen resp. 7 und 5 Einheiten betragen. Wir bezeichnen noch die Strecke OQ, resp. die Zahl 7 als die Abscisse x des Punktes P, und die Strecke OR resp. deren Länge 5 als seine Ordinate y; um dies möglichst kurz auszudrücken, sagen wir, es ist für den Punkt P

$$x = 7 \text{ und } y = 5.$$

Wenn es sich nicht darum handelt, Abscisse und Ordinate von einander zu unterscheiden, bezeichnen wir beide mit gemeinsamen Namen als Koordinaten des Punktes P.

Die nämliche Konstruktion können wir für jeden andern Punkt der Ebene ausführen. Wir erhalten dadurch zu jedem Punkt eine bestimmte Abscisse und Ordinate oder, wie wir auch sagen können, ein bestimmtes Zahlenpaar. Umgekehrt entspricht auch jedem Zahlenpaar auf Grund der obigen Konstruktion ein bestimmter Punkt. Um z. B. den Punkt P' zu zeichnen (Fig. 3), der dem Zahlenpaar 2,5 und 3,5 entspricht, haben wir auf der Geraden OX eine Strecke $OQ' = 2{,}5$ und auf OY eine Strecke $OR' = 3{,}5$ abzutragen und durch die Endpunkte Parallelen zu ziehen; der Schnittpunkt dieser Parallelen ist P'.

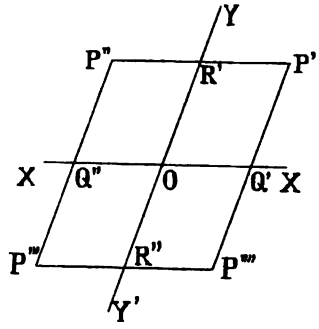


Fig. 3.

Da wir an und für sich die Strecken von der Länge 2,5 resp. 3,5 von O aus nach beiden Seiten der bezüglichen Geraden auftragen können, so könnte es zunächst scheinen, dass wir nicht einen, sondern vier Punkte erhalten, nämlich P', P'', P''', P''''. Dem entgehen wir aber dadurch, dass wir die auch sonst übliche Festsetzung treffen, den Abstand solcher Punkte, die von O aus nach entgegengesetzten Seiten liegen, mit entgegengesetztem Zeichen zu versehen. Rechnen wir daher, wie bisher, OQ' und OR' als positiv, so haben wir OQ'' und OR'' als negativ anzusehen, und nun gehören die Punkte P', P'', P''', P'''' zu vier verschiedenen Zahlenpaaren, nämlich zu

$$+ 2{,}5, + 3{,}5; \quad - 2{,}5, + 3{,}5; \quad - 2{,}5, - 3{,}5; \quad + 2{,}5, - 3{,}5.$$

Die Beziehung zwischen den Punkten und Zahlenpaaren ist daher eine solche, dass jedem Punkt ein Zahlenpaar, aber auch umgekehrt jedem Zahlenpaar ein Punkt entspricht.

Man nennt die beiden Geraden, von denen wir ausgingen, die Koordinatenaxen, im besondern die Gerade $X'OX$ die Abscissenaxe, und YOY' die Ordinatenaxe. Jede von ihnen hat eine posi-

tive und eine negative Hälfte. Sie teilen die Ebene in vier Teile, die man in der Reihenfolge, wie die Figur 3 zeigt, als die vier Quadranten bezeichnet. Ferner heisst der Punkt O, d. h. der Schnittpunkt der Koordinatenaxen der Anfangspunkt oder der Ursprung des Koordinatensystems, und der Winkel YOX der Koordinatenwinkel; ist er ein rechter, wie dies in den Anwendungen meist mit Vorteil angenommen wird, so spricht man von rechtwinkligen Koordinatenaxen.

Da die Koordinaten des Punktes P (Fig. 2) nichts anderes sind, als die Zahlen, die die Längen der Strecken OQ und OR angeben, so folgt, dass auch die Strecke PR, resp. PQ in ihrer Länge die Abscisse und Ordinate von P darstellen. Es genügt daher, eine der von P ausgehenden Parallelen zu ziehen, um die Koordinaten von P zu erhalten.

Die Abscissenaxe enthält augenscheinlich alle diejenigen Punkte, deren Ordinate den Wert Null hat, ebenso ist die Ordinatenaxe der Ort aller Punkte, deren Abscisse Null ist. Endlich ist der Anfangspunkt derjenige Punkt, dessen Koordinaten beide gleich Null sind, der also dem Zahlenpaar 0,0 entspricht.

§ 3. Das Grundprinzip der analytischen Geometrie.

Es sei eine Gleichung zwischen x und y gegeben, die wir in möglichst einfacher Form, nämlich in der Form

$$1) \quad x + y = 4$$

annehmen wollen. In der Elementarmathematik handelt es sich bei den Gleichungen nur um Berechnung der »Unbekannten«; es giebt dort immer nur einzelne bestimmte Werte dieser Unbekannten, die Lösungen der Gleichungen sind. Hier liegen jedoch die Dinge ganz anders; es giebt nämlich, wie sofort ersichtlich ist, unzählig viele Zahlenpaare, die in unsere Gleichung für x und y gesetzt werden können, die also, wie man zu sagen pflegt, die Gleichung befriedigen. Solche Zahlenpaare sind z. B.:

$x = 5 \quad x = 4 \quad x = 3 \quad x = 2 \quad x = 1 \quad x = -1 \quad x = -1{,}5$
$y = -1 \quad y = 0 \quad y = 1 \quad y = 2 \quad y = 3 \quad y = 5 \quad y = +5{,}5,$

wir können nämlich für eine der Grössen x und y, z. B. für x eine Zahl beliebig annehmen, so erhalten wir aus der Gleichung 1) stets einen zugehörigen Wert von y. Zu jedem dieser Zahlenpaare können wir nach dem vorigen Paragraphen einen Punkt konstruieren, dessen Koordinaten die bezüglichen Zahlen sind; auf diese Weise erhalten

wir (Fig. 4) eine unzählige Reihe von Punkten, und es ist einleuchtend, dass alle diese Punkte auf einer bestimmten geometrischen Kurve liegen werden, auf einer Kurve, von der man in unserem Falle nach der Figur schliessen muss, dass sie eine gerade Linie ist — was, wie sich später (S. 14) herausstellen wird, in der That der Fall ist.

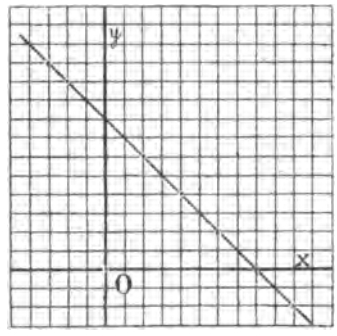


Fig. 4.

Ein zweites Beispiel sei die Gleichung

$$2) \quad y^2 = 2x.$$

Wir nehmen für x der Reihe nach die Werte 0, 1, 2, 3 ... an, so erhalten wir folgende Zahlenpaare, die die Gleichung befriedigen:

$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$
$y=0$	$y=\pm\sqrt{2}$	$y=\pm 2$	$y=\pm\sqrt{6}$	$y=\pm\sqrt{8}$	$y=\pm\sqrt{10}$
	$=\pm 1{,}4..$		$=\pm 2{,}45..$	$=\pm 2{,}8..$	$=\pm 3{,}2..$

Zu jedem Wert von x gehören also zwei verschiedene Werte von y, z. B. zu $x = 2$ die Werte $y = +2$ und $y = -2$, und es ist daher sowohl der Punkt P', der dem Zahlenpaar $x = 2$, $y = 2$ entspricht, als auch der Punkt P'', der dem Zahlenpaar $x = 2$, $y = -2$ entspricht, ein Punkt, dessen Koordinaten die Gleichung 2) befriedigen. Solcher Punkte können wir wieder unzählig viele ermitteln, und alle diese Punkte liegen wieder (Fig. 5) auf einer bestimmten geometrischen Kurve; wir werden in § 5 nachweisen, dass sie eine Parabel ist.

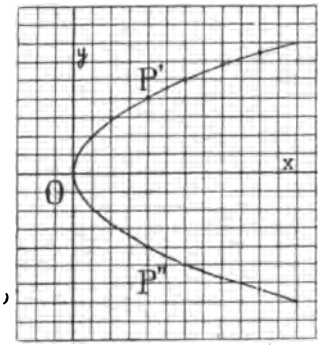


Fig. 5.

Die nämlichen Betrachtungen lassen sich an jede andere Gleichung zwischen x und y knüpfen. Den unzählig vielen Zahlenpaaren, die sie befriedigen, entsprechen stets unzählig viele Punkte, die auf einer gewissen Kurve liegen. Zwischen Gleichung und Kurve besteht daher ein gesetzmässiger Zusammenhang; er sagt aus, dass alle Punkte, deren Koordinaten der bezüglichen Gleichung genügen, auf der zugehörigen Kurve liegen, und diesen Zusammenhang drückt man einfach und kurz so aus, dass man sagt: die gegebene Gleichung ist die Gleichung der Kurve.

Hier eröffnet sich sofort eine weite Perspektive; wir sehen, welches die ersten Aufgaben im Gebiet der analytischen Geometrie sein werden. Zwei Probleme bieten sich unmittelbar dar: 1) zu jeder beliebigen Gleichung die zugehörige Kurve zu finden, und 2) zu jeder Kurve ihre Gleichung aufzustellen. Von diesen beiden Aufgaben haben wir für unsere Zwecke nur die einfachsten Fälle zu erledigen.

§ 4. Die Gleichung des Kreises.

Es sei ein Kreis gegeben mit dem Radius r, und es sei die Aufgabe gestellt, seine Gleichung zu bilden. Wir nehmen die Koordinatenaxen zweckmässig so an, dass sie durch den Mittelpunkt O gehen und einen rechten Winkel einschliessen (Fig. 6). Ist dann P_1 irgend ein Punkt des Kreises, so wollen wir seine Koordinaten OQ_1 und P_1Q_1 mit x_1 resp. y_1 bezeichnen. Aus dem rechtwinkligen Dreieck OP_1Q_1 folgt nach dem Pythagoräischen Lehrsatz, dass

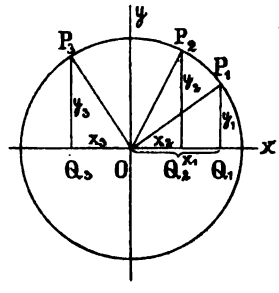


Fig. 6.

$$OQ_1^2 + P_1Q_1^2 = OP_1^2$$

ist, oder, wenn wir für OQ_1, P_1Q_1 und OP_1, resp. x_1, y_1, r setzen

$$1) \quad x_1^2 + y_1^2 = r^2.$$

Ist P_2 ein zweiter Punkt des Kreises und sind seine Koordinaten OQ_2 und P_2Q_2, resp. x_2 und y_2, so ergiebt sich ganz analog aus dem rechtwinkligen Dreieck OP_2Q_2

$$OQ_2^2 + P_2Q_2^2 = OP_2^2,$$

resp.

$$2) \quad x_2^2 + y_2^2 = r^2.$$

Ebenso folgt für irgend einen dritten Punkt P_3 mit den Koordinaten OQ_3 und P_3Q_3, resp. x_3 und y_3, dass

$$OQ_3^2 + P_3Q_3^2 = OP_3^2,$$

resp.

$$3) \quad x_3^2 + y_3^2 = r^2,$$

wobei wir nicht unterlassen wollen, darauf hinzuweisen, dass zwar nach der Figur der Wert x_3 der Abscisse OQ_3 gemäss § 2 eine negative Zahl ist, dass aber doch x_3^2 als das Quadrat einer negativen Zahl positiv ist und daher wirklich das Quadrat der Dreiecksseite OQ_3 angiebt.

Aehnliche Gleichungen können wir für jeden beliebigen Punkt des Kreises aufstellen; es fragt sich aber, wie wir die Gleichung des

Kreises selbst erhalten. Wir sehen sofort, dass diese Gleichung einfach

$$4) \quad x^2 + y^2 = r^2$$

zu schreiben ist; in der That ist dies diejenige Gleichung in x und y, die erfüllt ist, wenn für x und y die Coordinaten irgend eines Punktes des Kreises eingesetzt werden. Diese Gleichung wird durch die Koordinatenpaare $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ ... in demselben Sinn befriedigt, wie die Gleichung des § 3 durch die dort angegebenen Zahlenpaare.

Welches ist denn nun aber der innere Grund, dass es eine und dieselbe Gleichung ist, die durch die Koordinaten aller Punkte des Kreises erfüllt wird? Dieser Grund ist kein anderer als der, dass es auch eines und dasselbe Gesetz ist, das die Beziehung sämtlicher Punkte des Kreises zum Mittelpunkte regelt. Jeder Punkt des Kreises ist vom Mittelpunkte gleichweit entfernt; was sich für den Punkt P_1 und seine Koordinaten x_1 und y_1 ergiebt, muss ebenso für die Koordinaten von P_2 und P_3 giltig sein; es ist ja auch ganz gleichgiltig, welche Punkte wir mit P_1, P_2, P_3 bezeichnen. Mit anderen Worten, wir brauchen, um die Gleichung abzuleiten, die von den Koordinaten der Punkte des Kreises befriedigt wird, diese Gleichung nur für irgend einen seiner Punkte aufzustellen; dieser eine Punkt ist eben jeder Punkt.

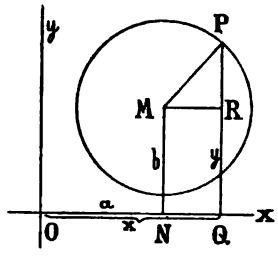


Fig. 7.

Dieses Prinzip ist von grosser Wichtigkeit; wir werden uns seiner von nun an stets bedienen, um zu der Gleichung einer Kurve zu gelangen; und wenn wir die Koordinaten desjenigen Punktes, für den wir die Gleichung aufstellen, sofort mit x und y bezeichnen, so erhalten wir direkt die Gleichung der Kurve. Es wird eine gute Uebung sein, zunächst die Gleichung des Kreises noch in anderer Form darzustellen, nämlich für den Fall, dass sein Mittelpunkt M nicht im Anfangspunkt der Koordinaten liegt. (Fig. 7.) Sind die Koordinaten des Mittelpunktes, nämlich ON und MN, resp. gleich a und b, sind wieder die Koordinaten des Punktes P $OQ = x$ und $PQ = y$, und ist MR gleich und parallel zu NQ, so folgt zunächst wieder aus dem rechtwinkligen Dreieck MPR

$$MR^2 + PR^2 = MP^2.$$

Nun ist aber

$$MR = NQ = OQ - ON = x - a$$
$$PR = PQ - RQ = PQ - MN = y - b,$$

also ergiebt sich durch Einsetzen

$$1) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

und dies ist daher die Gleichung des Kreises.

Als Nebenresultat entnehmen wir unserer Rechnung eine Formel, die den Abstand zweier Punkte giebt, deren Koordinaten bekannt sind. Die Gleichung 1) stellt diese Formel unmittelbar dar. Sie sagt aus, dass der Abstand r der Punkte M und P durch den auf der linken Seite der Gleichung stehenden Ausdruck dargestellt wird. Ersetzen wir noch — der Symmetrie der Bezeichnung wegen — x und y durch a_1 und b_1, so erhalten wir als Abstand r zweier Punkte mit den Koordinaten $(a\,b)$ und $(a_1\,b_1)$

$$2) \quad r^2 = (a_1 - a)^2 + (b_1 - b)^2.$$

Beispiel: Das Quadrat des Abstandes der Punkte P_1 und P_2 (Fig. 8), deren Koordinaten (3,4) und (2,1) sind, beträgt $(3 - 2)^2 + (4 - 1)^2$ oder 10. Denken wir uns die Linie P_1P_2 um vier Längeneinheiten nach links geschoben, so dass sie in die Lage R_1R_2 übergeht, so haben die Punkte R_1 und R_2 die Koordinaten (— 1,4) und (— 2,1), für das Quadrat ihres Abstandes ergiebt sich also

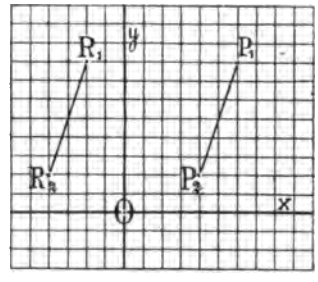


Fig. 8.

$$[-1 - (-2)]^2 + [4 - 1]^2 = (2 - 1)^2 + (4 - 1)^2 = 10$$

wie nötig. Unsere Formel gilt also auch, wenn die Koordinaten der Punkte negative Werte haben. Der innere Grund dafür besteht natürlich darin, dass für positive und negative Zahlen die gleichen Rechnungsgesetze gelten.*)

§ 5. Die Gleichung der Parabel.

Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einem festen Punkt und einer festen Geraden die gleiche Entfernung haben. Ist (Fig. 9) P ein beliebiger Punkt der Parabel, F der feste Punkt, d die feste

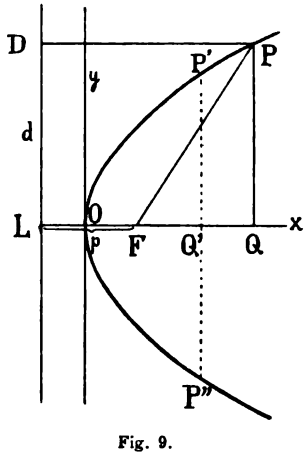


Fig. 9.

*) Vgl. auch die Anmerkung auf S. 13.

Gerade und PD der Abstand des Punktes P von d, so ist die definierende Eigenschaft der Parabel durch

$$1) \quad PF = PD$$

ausgedrückt. Um die Parabelgleichung in möglichst einfacher Gestalt zu erhalten, wählen wir das von F auf d gefällte Lot FL als x-Axe und die Mitte zwischen F und L als Anfangspunkt des Koordinatensystems. Die Entfernung FL bezeichnen wir durch p und nennen sie den Parameter der Parabel. Sind wieder x und y die Koordinaten von P, so ist

$$PD = OQ + \tfrac{p}{2} = x + \tfrac{p}{2}$$

$$PF^2 = FQ^2 + PQ^2 = (x - \tfrac{p}{2})^2 + y^2$$

und demnach erhalten wir durch Einsetzen

$$(x - \tfrac{p}{2})^2 + y^2 = (x + \tfrac{p}{2})^2, \text{ resp.}$$

$$x^2 - px + \tfrac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \tfrac{p^2}{4}$$

und daraus schliesslich

$$y^2 = 2px.$$

Dies ist daher die Gleichung der Parabel. Wir sehen hieraus, dass die in § 2 konstruierte Kurve wirklich eine Parabel ist, und zwar eine solche, deren Parameter gleich der Einheit ist. Wir bemerken noch, dass der Punkt F Brennpunkt heisst und die Gerade d die Directrix der Parabel.

Wir fragen sofort, wie wir die Gestalt der Parabel aus ihrer Gleichung entnehmen können. Zunächst ist ersichtlich, dass, wenn x einen negativen Wert erhält, auch für y^2 ein negativer Wert auftritt. Es giebt aber keine reellen Zahlen, deren Quadrat negativ ist, und daraus folgt, dass die Punkte der Parabel nur auf der rechten Seite der y-Axe liegen können. Ist $x = 0$, so ist auch $y = 0$, die Parabel geht also durch den Anfangspunkt. Erhält x irgend einen positiven Wert, ist z. B. $x = OQ'$, so giebt die Gleichung dazu zwei verschiedene Werte von y, nämlich zwei, die sich nur im Vorzeichen unterscheiden; ihnen entsprechen zwei Punkte P und P', die in gleichen Abständen von Q' senkrecht oberhalb und unterhalb der x-Axe liegen. Dies gilt für jeden Wert von x; es ergeben sich lauter Punktepaare, die symmetrisch zur x-Axe liegen, und man nennt deshalb die x-Axe eine Symmetrieaxe der Parabel.

Zweitens bemerken wir, dass, wenn man für x immer grössere Werte setzt, auch die Werte von y ununterbrochen zunehmen; je weiter die Parabel verläuft, um so mehr entfernt sie sich also nach beiden

Seiten von der x-Axe. Damit hätten wir uns eine erste vorläufige Vorstellung von der Gestalt der Parabel gebildet. Wir kommen hierauf in Kap. VI noch einmal zurück.

§ 6. Die Gleichung der geraden Linie.

Wir leiten die Gleichung der geraden Linie zunächst unter der Voraussetzung ab, dass sie durch den Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems geht. Wir können sie dann dahin definieren, dass jeder ihrer Punkte, mit O verbunden, den gleichen Winkel mit der x-Axe bildet.

Diesen Winkel haben wir genauer zu definieren, und zwar deshalb, weil zwei Geraden mit einander zwei verschiedene Winkel einschliessen. Hierüber gelten allgemein folgende einheitliche Festsetzungen: Die positive x-Axe gelangt durch Drehung um 90^0 in einem Sinn, der dem des Uhrzeigers entgegengesetzt ist, in die Lage der positiven y-Achse. Diese Drehungsrichtung bezeichnet man als die positive, und versteht nunmehr unter dem Winkel einer Geraden g mit der x-Axe denjenigen Winkel, um den man die positive x-Axe im positiven Sinn um den Schnittpunkt drehen muss, bis sie mit g zusammenfällt; in Fig. 10 ist dies der Winkel φ. Diejenige Richtung der Geraden, mit der die positive x-Achse hierdurch zusammenfällt, bezeichnet man demgemäss auch als positive Richtung von g.*)

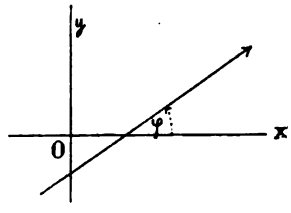


Fig. 10.

Ist nun (Fig. 11) g die Gerade, deren Gleichung wir aufzustellen suchen, so haben wir davon auszugehen, dass ein beliebiger Punkt P von ihr mit O verbunden stets den Winkel α mit der x-Axe einschliesst. Bezeichnen wir daher die Koordinaten von P mit x und y, so folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck POQ sofort die Gleichung

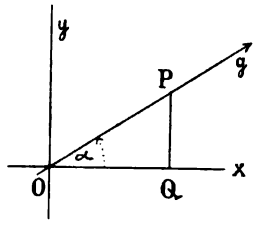


Fig. 11.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x}$$

resp.

$$1)\quad y = x\operatorname{tg}\alpha$$

und dies ist bereits die gesuchte Gleichung der geraden Linie.

*) In der Figur ist sie durch einen Pfeil kenntlich gemacht.

Beispiel 1: Die Gleichung $y - x = 0$ oder $y = x$ stellt eine Gerade dar, für die $\operatorname{tg}\alpha = 1$ ist, d. h. $\alpha = 45^0$. Ebenso stellt $y + x = 0$, resp. $y = -x$ eine Gerade dar, für die $\operatorname{tg}\alpha = -1$ ist, d. h. $\alpha = 135^0$.*) Diese beiden Geraden halbieren also die beiden von den Koordinatenaxen eingeschlossenen Winkel.

Beispiel 2: Die Gleichung $y = 0$ stellt diejenige Gerade durch O dar, für die $\operatorname{tg}\alpha = 0$, also $\alpha = 0$ ist, d. h. die x-Axe. Man sieht dies auch direkt. Das Gesetz, das die Gleichung $y = 0$ ausdrückt, besagt nämlich, dass sie den geometrischen Ort aller Punkte darstellt, deren Ordinate y den Wert Null hat, und dies sind eben die Punkte der x-Axe. Ebenso ist $x = 0$ die Gleichung der y-Axe, resp. die Gleichung des geometrischen Ortes aller derjenigen Punkte, deren Abscisse Null ist. (§ 2.)

Hat die Gerade (Fig. 12) eine beliebige Lage zu den Koordinatenaxen, ist G ihr Schnittpunkt mit der y-Axe, α der Winkel, den sie mit der x-Axe bildet, und die Strecke OG gleich b, so können wir sie wieder dadurch definieren, dass die Verbindungslinie eines jeden ihrer Punkte P mit G gegen die x-Axe unter demselben Winkel α geneigt ist. Ziehen wir noch PQ und GN parallel zur x-Axe, so ist auch der Winkel PGN gleich α und in dem rechtwinkligen Dreieck PGN ist jetzt

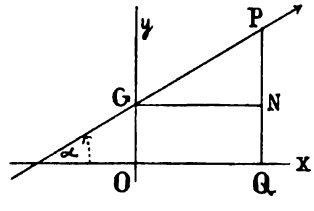


Fig. 12.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{PN}{GN} = \frac{y-b}{x},$$

wenn x und y die Koordinaten von P sind; also folgt

$$2)' \quad y = x\operatorname{tg}\alpha + b$$

und dies ist wiederum die gesuchte Gleichung der geraden Linie. Man pflegt zur Abkürzung $\operatorname{tg}\alpha$ durch m zu bezeichnen; alsdann ergiebt sich die Gleichung der Geraden in der Form

$$3) \quad y = mx + b.$$

Die Gleichung einer jeden geraden Linie ist von dieser Form, die einzelnen Gleichungen unterscheiden sich nur in den Werten von m und b, die von der Lage der Geraden abhängen. Geht z. B. die Gerade durch O, so ist $b = 0$, und ihre Gleichung wird einfach

$$4) \quad y = mx$$

in Uebereinstimmung mit den vorhergehenden Ergebnissen. Umgekehrt

*) Vgl. hierzu die Anmerkung auf S. 13.

wird aber auch durch jede Gleichung $y = mx + b$ eine Gerade dargestellt, welches auch die Werte von m und b sein mögen. Denn durch b ist immer ein Punkt G bestimmt, welche Zahl auch b sein mag, und für jede Zahl m existiert ein Winkel α, so dass $\operatorname{tg}\alpha = m$ ist; durch einen Punkt und ihre Richtung ist aber die Gerade selbst ihrer Lage nach bestimmt.*)

Wir ziehen aus dem vorstehenden die wichtige Folgerung, dass jede Gleichung von der Form

$$7) \quad Ax + By + C = 0,$$

wo A, B, C irgend welche positiven oder negativen Zahlen sind, die Gleichung einer geraden Linie ist. Dividieren wir nämlich die Gleichung durch B und lassen y allein auf der linken Seite stehen, so geht sie in die Form

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

über; und dies ist in der That die Gleichung einer geraden Linie, nämlich derjenigen, für die

$$8) \quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{A}{B} \text{ und } b = -\frac{C}{B}$$

---

*) Wir halten es nicht für überflüssig, direkt nachzuweisen, dass unsere Schlüsse und Resultate sich nicht ändern, wenn b oder m negative Werte haben, d. h. wenn die Gerade eine Lage zum Koordinatensystem hat, die auf eine scheinbar andere Figur führt. Für die in Fig. 13 gezeichnete Gerade folgt zunächst aus dem Dreieck PGN

$$\operatorname{tg}(180-\alpha) = \frac{PN}{NG} = \frac{PQ+QN}{NG}.$$

Jetzt ist aber (§ 2) sowohl x als b eine negative Zahl und daher wird die Länge von QN durch $-b$ und die Länge von NG durch $-x$ ausgedrückt. Andrerseits ist $\operatorname{tg}(180-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, also erhalten wir zunächst

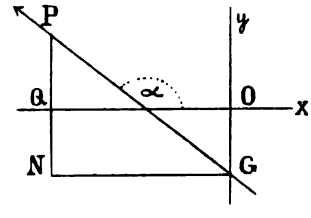


Fig. 13.

$$-\operatorname{tg}\alpha = \frac{y-b}{-x}$$

und hieraus wieder

$$y = x\operatorname{tg}\alpha + b = mx + b.$$

Der innere Grund der Allgemeingiltigkeit unserer Resultate liegt darin, dass die Rechnungsregeln für positive und negative Zahlen, sowie die trigonometrischen Formeln für spitze und stumpfe Winkel die nämlichen sind, und dass, wenn auch die Figuren für die verschiedenen Lagen der Geraden verschieden sind, doch ihre Eigenschaften, ihre Gesetzmässigkeit — und nur auf diese kommt es an — in allen Fällen dieselben bleiben. Wir dürfen es daher im Folgenden unterlassen, auf die Allgemeingiltigkeit unserer Gleichungen jedesmal besonders hinzuweisen.

ist, womit die Behauptung erwiesen ist. Im besondern sehen wir, dass die Gleichung des § 2

$$x + y = 4 \text{ oder } y = -x + 4$$

diejenige Gerade darstellt, die auf der y-Axe eine Strecke von der Länge 4 abschneidet, und mit der x-Axe einen Winkel bildet, für den $\operatorname{tg} \alpha = -1$, d. h. einen Winkel von 135^0, was genau mit Fig. 4 übereinstimmt.

Man nennt die Gleichung 7), da sie x und y nur im ersten Grade enthält, die allgemeine Gleichung ersten Grades, und spricht demgemäss davon, dass die allgemeine Gleichung ersten Grades eine gerade Linie darstellt.

Beispiel: Für die Gerade $4x - 2y + 5 = 0$ ist $b = 2$ und $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{2}$, also α ungefähr $68^0 \ldots$ für die Gerade $x - 3y + 6 = 0$ ist $b = \frac{1}{3}$ und $\operatorname{tg} \alpha = -2$, also α ziemlich gleich $116^1/_2{}^0$, darnach kann man beide Geraden zeichnen.

Um die Lage einer Geraden aus ihrer Gleichung zu entnehmen, bedient man sich übrigens zweckmässig eines andern Verfahrens. Man benützt dazu nicht den Winkel α, da er sich zur wirklichen Konstruktion wenig eignet, sondern man sucht irgend zwei Punkte der Geraden zu ermitteln; durch sie ist die Gerade vollständig bestimmt. Am bequemsten lassen sich die Punkte finden, in denen sie die Axen schneidet. Ist die Gleichung der Geraden in allgemeiner Form

$$Ax + By + C = 0$$

gegeben, so erhalten wir diese Punkte folgendermassen: Der Schnittpunkt mit der y-Axe ist derjenige Punkt, dessen Abscisse x den Wert Null hat, wir finden ihn also, wenn wir in obige Gleichung für x Null setzen. Dies giebt den Punkt

$$9) \quad x = 0, \quad y = -\frac{C}{B}.$$

Ebenso ist der Schnittpunkt mit der x-Axe derjenige Punkt, dessen Ordinate $y = 0$ ist; für ihn giebt die Gleichung

$$10) \quad y = 0, \quad x = -\frac{C}{A}.$$

Beispiel: Die Schnittpunkte der Geraden $5x - 7y + 2 = 0$ mit den Axen sind die Punkte $(0, \frac{2}{7})$ und $(-\frac{2}{5}, 0)$.

§ 7. Das Gesetz von Gay-Lussac.

Nach dem Gesetz von Gay-Lussac besitzen die Gase folgende Eigenschaft: Wenn ihr Volumen konstant erhalten wird, so nimmt ihr Druck, bei Erwärmung um 1^0, um den 273sten Teil desjenigen Druckes zu, unter dem sie bei 0^0 standen. Ist dieser Druck p_0, so beträgt danach die Druckvermehrung, die durch 1^0 Erwärmung erfolgt, $\frac{p_0}{273}$ und bei t^0 bezüglich $\frac{p_0}{273}t$; der schliessliche Druck bei t^0 ist daher

$$p = p_0 + \frac{p_0}{273}t = p_0\left(1 + \frac{t}{273}\right).$$

Nehmen wir nun der Einfachheit halber an, dass der Druck p_0 den Wert 1 hat, so wird diese Formel

$$p = 1 + \frac{t}{273}.$$

Diese Gleichung ist eine Gleichung ersten Grades in t und p; ersetzen wir noch p durch y und t durch x, so dass sie in

$$y = 1 + \frac{x}{273}$$

übergeht, so sehen wir, dass sie durch eine gerade Linie dargestellt wird; und diese Gerade (Fig. 14) ist das Bild des Gesetzes. Was sie besonders deutlich zeigt, ist, dass der Druck mit der Temperatur stets in gleichem Masse zunimmt.

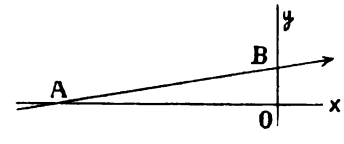


Fig. 14.

Wir bestimmen noch die Schnittpunkte mit den Axen und finden die Punkte B und A, für die resp.

$$x = 0,\ y = 1 \text{ und } y = 0,\ x = -273.^*)$$

Der Punkt A zeigt, dass für $t = -273$ der Druck p gleich Null ist, vorausgesetzt natürlich, dass obiges Gesetz für so niedere Temperaturen noch gilt. Diesen Wert von t nennt man bekanntlich die absolute Temperatur. Sinkt t noch tiefer, so würde sich aus der obigen Gleichung sogar ein negativer Wert von p ergeben; eine Folgerung, die natürlich absurd ist und physikalisch bekanntlich dahin gedeutet wird, dass Temperaturen unter -273^0 unmöglich sind.

*) Um die richtige Lage der Geraden zu erhalten, hat man daher OA 273mal so gross zu nehmen, wie OB. Dies ist jedoch für die Zeichnung nicht angängig; die obige Figur giebt daher nur ein schematisches Bild der Geraden. Auf ähnliche Weise muss man sich immer helfen, wenn die Zahlenwerte der Koordinaten in einem für die Zeichnung zu ungünstigen Verhältnisse stehen. Vgl. z. B. Kohlrausch, Wied. Ann. Bd. 26, S. 161 (1886).

§ 8. Aufgaben über die gerade Linie.

Welches ist die Lage derjenigen geraden Linie, deren Gleichung

$$1) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

lautet? Wir bestimmen wieder die Punkte, in denen sie die Axen schneidet. Um den Schnittpunkt mit der y-Axe zu erhalten, setzen wir in die obige Gleichung $x = 0$ und finden $y = b$; der zugehörige Punkt sei B (Fig. 15). Ebenso ergiebt sich für den Schnittpunkt mit der x-Axe, dessen Ordinate $y = 0$ ist, der Wert $x = a$, dies liefert den Punkt A. Die Grössen a und b bedeuten also die Längen der Abschnitte, die die Gerade auf den Axen bestimmt.

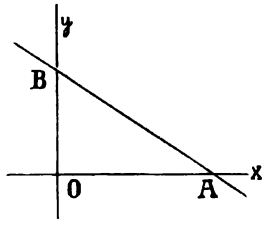


Fig. 15.

Aus der obigen Gleichungsform lässt sich die Lage einer Geraden am einfachsten entnehmen. Wir sehen z. B. sofort, dass die Gerade $x + y = 4$ (§ 3), wenn wir ihre Gleichung in die Form $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$ setzen, auf jeder Axe eine Strecke von der Länge 4 abschneidet. Ebenso finden wir für die Gerade $4x + 3y - 2 = 0$, wenn wir die Gleichung in die Form $\frac{4}{2}x + \frac{3}{2}y = 1$ setzen, die Abschnitte $a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ und $b = \frac{2}{3}$.

Die Gleichung einer Geraden zu bestimmen, die eine gegebene Richtung α gegen die x-Axe hat, und durch einen gegebenen Punkt L geht, dessen Koordinaten ξ und η sind.

Die Gleichung einer jeden Geraden hat nach § 6, 3 die Form

$$2) \quad y = mx + b;$$

um die Gleichung einer bestimmten Geraden zu finden, ist in jedem Fall die Aufgabe zu lösen, diejenigen Werte von m und b zu finden, die dieser Geraden entsprechen. Es sei also 2) die Gleichung unserer Geraden; alsdann ist $m = \operatorname{tg} \alpha$, wo α der gegebene Winkel ist, während b einen bestimmten, aber noch unbekannten Wert hat. Da nun die Koordinaten des Punktes L der Gleichung der Geraden genügen müssen, so ist

$$3) \quad \eta = m\xi + b.$$

In dieser Gleichung ist nur b unbekannt; wir können also den Wert von b aus ihr entnehmen und ihn in die erste Gleichung einsetzen.

Damit ist unsere Aufgabe im Prinzip erledigt. Wir können uns aber die gesuchte Gleichung noch auf eine etwas andere Weise verschaffen. Sollen wir b aus Gleichung 3) ausrechnen und den Wert in 2) einsetzen, so heisst dies mit andern Worten, dass wir mittelst der Gleichung 3) b aus der Gleichung 2) zu eliminieren haben. Diese Elimination führen wir am einfachsten so aus, dass wir beide Gleichungen von einander subtrahieren; wir finden dann sofort

$$4) \quad y - \eta = m\,(x - \xi)$$

und dies ist die Gleichung der gesuchten Geraden.

Die Gleichung derjenigen Geraden zu finden, die durch zwei gegebene Punkte geht, deren Koordinaten $\xi\eta$ und $\xi'\eta'$ sind.

Die gesuchte Gleichung der Geraden hat jedenfalls die Form

$$5) \quad y = mx + b,$$

wo m und b bestimmte, noch unbekannte Werte haben, die zu berechnen sind. Da die Koordinaten $\xi\eta$ und $\xi'\eta'$ der Gleichung der Geraden genügen, so erhalten wir

$$6) \quad \eta = m\xi + b$$
$$7) \quad \eta' = m\xi' + b$$

und dies sind die beiden Gleichungen, aus denen die Werte von m und b zu berechnen und dann in 1) einzusetzen sind. Dies heisst wiederum, dass wir m und b aus unsern drei Gleichungen 5), 6), 7) eliminieren müssen. Die einfachste Art ist die folgende: Wir subtrahieren die dritte von der ersten und zweiten, so folgt

$$y - \eta' = m\,(x - \xi')$$
$$\eta - \eta' = m\,(\xi - \xi')$$

und wenn wir diese beiden Gleichungen durch einander dividieren, so folgt schliesslich

$$8) \quad \frac{y - \eta'}{\eta - \eta'} = \frac{x - \xi'}{\xi - \xi'}$$

als die gesuchte Gleichung. Damit ist unsere Aufgabe erledigt.*)

Beispiel: Die Gleichung der Geraden, die durch die Punkte (2,1) und (— 3,4) geht, lautet

$$\frac{y-4}{1-4} = \frac{x+3}{2+3}$$

oder, in vereinfachter Form

$$3x + 5y - 11 = 0.$$

*) Man kann die Gleichung natürlich auch in eine Form bringen, aus der man die Werte von m und b direkt ersieht; eine einfache Rechnung verwandelt sie in

$$y = \frac{\eta - \eta'}{\xi - \xi'}\,x + \frac{\xi\eta' - \eta\xi'}{\xi - \xi'}$$

Die Gleichung der Geraden, die durch die Punkte (3, 2) und (— 3, — 2) geht, lautet $2x - 3y = 0$, die Gerade geht also durch den Anfangspunkt.

§ 9. Zwei gerade Linien.

Sind zwei gerade Linien gegeben, so interessiert uns vor allem ihr Schnittpunkt und der Winkel, den sie mit einander einschliessen.

Die Gleichungen der beiden geraden Linien seien

$$1) \quad y = mx + b \text{ und}$$
$$2) \quad y = m'x + b'.$$

Jede Gleichung wird durch unzählig viele Wertepaare von x und y befriedigt, und zwar jede durch die Koordinaten ihrer sämtlichen Punkte. Diese Wertepaare sind für beide Gleichungen im allgemeinen verschiedene, es giebt aber notwendig eines und nur eines unter ihnen, das beiden Gleichungen genügt, nämlich dasjenige, das dem Schnittpunkt beider Geraden entspricht. Um dieses Wertepaar zu finden, haben wir die beiden Gleichungen in gewöhnlicher Weise nach x und y als Unbekannten aufzulösen. Jede Auflösung von zwei Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten bedeutet also geometrisch die Bestimmung des Schnittpunktes der beiden Geraden, welche durch die beiden Gleichungen dargestellt werden.

Beispiel: Die drei Geraden $x + 7y + 11 = 0$, $x - 3y + 1 = 0$ und $3x + y - 7 = 0$ bestimmen ein Dreieck, dessen Ecken die Punkte (2,1), (3,—2), (—4,—1) sind.

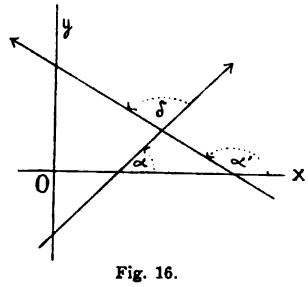


Fig. 16.

Unter dem Winkel δ, den die beiden Geraden mit einander einschliessen, versteht man denjenigen Winkel, den ihre positiven Richtungen bilden. (S. 11.) Für ihn erhalten wir, wenn ihre Winkel mit der x-Axe α und α' sind, aus Figur 16 zunächst die Gleichung

$$\alpha' = \delta + \alpha \text{ oder } \delta = \alpha' - \alpha.$$

Es ist daher

$$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}(\alpha' - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha' - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha' \cdot \operatorname{tg}\alpha}$$

Ersetzen wir nun $\operatorname{tg}\alpha$ durch m und $\operatorname{tg}\alpha'$ durch m', so folgt

$$3) \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{m' - m}{1 + mm'}.$$

Sollen die Geraden parallel sein, so muss δ, also auch $\operatorname{tg}\delta$ den Wert Null haben, d. h. es ist

$$4) \quad m = m'$$

wie auch an und für sich klar ist. Stehen die Geraden senkrecht aufeinander, so hat δ die Grösse 90^0 und es ist $\operatorname{tg}\delta$ unendlich gross, und daher muss der Nenner des obigen Quotienten Null sein, d. h.

$$5) \quad 1 + mm' = 0.$$

Dies ist also die Bedingung dafür, dass beide Geraden senkrecht auf einander stehen.

Beispiel: Für den Winkel der beiden Geraden $3x + y - 7 = 0$ und $x - 3y + 1 = 0$ findet man $\delta = 90^0$; das oben erwähnte Dreieck ist daher im Schnittpunkt dieser beiden Geraden, d. h. am Punkt (2,1) rechtwinklig.

Für die Geraden $2x - 3y = 5$ und $4x - 6y = 1$ folgt, dass sie parallel sind. Für die Koordinaten ihres Schnittpunktes ergeben sich formal die Werte

$$x = \frac{10 - 1}{0}, \; y = \frac{10 - 1}{0}$$

d. h. x und y sind unendlich gross. Dies stimmt damit überein, dass man parallele Geraden als solche zu betrachten pflegt, die sich erst im Unendlichen schneiden.

Bemerkung. Wir knüpfen hieran folgende Erörterung, die zwar keinen praktischen Nutzen bietet, aber doch theoretisch interessant ist. Wir haben eben gesehen, dass zwei Gleichungen ersten Grades in x und y einen Punkt bestimmen, nämlich den Schnittpunkt der zugehörigen geraden Linien. Erinnern wir uns nun, dass, wenn a und b die Koordinaten eines Punktes P sind, dies durch die Gleichungen

$$6) \quad x = a, \; y = b$$

ausgedrückt wird, so entspringt sofort die Frage, ob sich auch diese beiden Gleichungen in dem angegebenen Sinn auffassen lassen. Dies ist in der That der Fall.

Die Gleichung $y = b$ ist nach § 6 die Gleichung einer geraden Linie, für die $m = 0$ ist, also auch $\operatorname{tg}\alpha$ resp. α selbst, d. h. sie ist der x-Axe parallel; andererseits geht sie durch den Punkt G der y-Axe, für den $OG = b$ ist; sie ist also eine Parallele zur x-Axe, die den Abstand b von ihr hat. Man sieht dies auch direkt. Die Gleichung $y = b$ entspricht dem geometrischen Ort aller Punkte, deren Ordinate gleich b ist, und diese liegen auf der genannten Parallelen. Ebenso folgt, dass $x = a$ eine Gerade darstellt, die im Abstande a der y-Axe parallel läuft; und diese beiden Geraden schneiden sich genau in dem Punkt, dessen Koordinaten durch die Gleichungen 6) bestimmt sind.

Die Koordinatenbestimmung läuft also geometrisch darauf hinaus, jeden Punkt der Ebene als Schnittpunkt von zwei Geraden zu betrachten, die zwei festen Axen parallel sind. Denkt man sich alle Parallelen zur x-Axe, und alle Parallelen zur y-Axe, so geht durch jeden Punkt je eine von ihnen, und die Entfernungen dieser beiden Geraden von den Axen sind genau die Koordinaten des Punktes, in dem sie sich schneiden.

Mit diesem Ausblick mögen die Erörterungen über die gerade Linie ihren Abschluss finden.

§ 10. Die Gleichung der Ellipse.

Die Ellipse ist der geometrische Ort derjenigen Punkte, für welche die Summe ihrer Entfernungen von zwei festen Punkten einen konstanten Wert hat. Den konstanten Wert nennen wir $2a$.

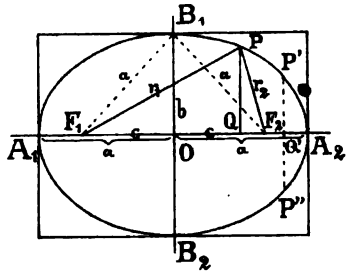


Fig. 17.

Wir nehmen (Fig. 17) die Verbindungslinie der beiden festen Punkte F_1 und F_2 als x-Axe und das in der Mitte von F_1F_2 errichtete Lot als y-Axe. Die Strecke F_1F_2 bezeichnen wir durch $2c$ und nennen r_1 und r_2 die Abstände des Ellipsenpunktes P von F_1 und F_2, sodass

$$1) \quad r_1 + r_2 = 2a$$

ist, und zwar ist offenbar

$$2) \quad 2c < 2a.$$

Sind x und y die Koordinaten des Punktes P, so ist, wie aus der Figur folgt,

$$3) \quad r_1^2 = (c + x)^2 + y^2$$
$$4) \quad r_2^2 = (c - x)^2 + y^2.$$

Setzen wir diese Werte von r_1 und r_2 in 1) ein, so ergiebt sich die zwischen x und y bestehende Gleichung, d. h. die Gleichung der Ellipse. Dies geschieht zweckmässig, wie folgt. Um nicht mit Wurzelzeichen zu rechnen, erheben wir 1) ins Quadrat und erhalten

$$r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 = 4a^2$$

oder

$$r_1^2 + r_2^2 - 4a^2 = -2r_1r_2.$$

Diese Gleichung quadrieren wir noch einmal und finden

$$5) \quad (r_1^2 + r_2^2)^2 - 8a^2(r_1^2 + r_2^2) + 16a^4 = 4r_1^2r_2^2.$$

Bringen wir $4r_1^2r_2^2$ nach links und beachten, dass

$$(r_1^2 + r_2^2)^2 - 4r_1^2r_2^2 = r_1^4 + r_2^4 + 2r_1^2r_2^2 - 4r_1^2r_2^2$$
$$= r_1^4 + r_2^4 - 2r_1^2r^2 = (r_1^2 - r_2^2)^2$$

so ergiebt sich schliesslich

$$(r_1^2 - r_2^2)^2 - 8a^2(r_1^2 + r_2^2) + 16a^4 = 0.$$

Nun folgt aus den Gleichungen 3) und 4), dass

$$r_1^2 + r_2^2 = 2(x^2 + y^2 + c^2),$$
$$r_1^2 - r_2^2 = 4cx$$

ist, also erhalten wir durch Einsetzen

$$16c^2x^2 - 16a^2(x^2 + y^2 + c^2) + 16a^4 = 0,$$

und wenn wir ordnen,

$$7) \quad x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Dividieren wir noch beide Seiten durch $a^2(a^2 - c^2)$; so folgt schliesslich

$$8) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Ist nun B_1 ein solcher Punkt der y-Axe*), dass für ihn

$$B_1F_1 = B_1F_2 = a$$

ist, und bezeichnen wir OB_1 durch b, so folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck B_1F_1O, dass

$$9) \quad b^2 + c^2 = a^2, \text{ also } a^2 - c^2 = b^2$$

ist, und wenn wir dies einsetzen, so geht unsere Gleichung in

$$10) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

über. Dies ist die Gleichung der Ellipse.

Wir verschaffen uns zunächst ein Bild von der Gestalt der Ellipse. Geben wir dem x irgend einen bestimmten Wert, nehmen wir z. B. $x = OQ'$, so bestimmen sich die zugehörigen Werte von y aus der Gleichung

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}, \quad y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Zu einem Wert von x gehören also zwei Werte von y, die sich nur im Vorzeichen unterscheiden und daher zwei Punkte P' und P'' liefern, die symmetrisch zur x-Axe liegen. Die x-Axe ist also eine Symmetrieaxe der Ellipse; da die Gleichung der Ellipse in Bezug auf x und y ganz gleichartig gebaut ist, so folgt ebenso, dass auch die y-Axe eine Symmetrieaxe der Ellipse ist. Die Axen zerlegen also die Ellipse in vier kongruente Quadranten; es genügt, einen dieser Quadranten zu diskutieren.

Wir fragen, wie sich y ändert, wenn wir x von Null an wachsen lassen. Ist

$$x = 0, \text{ so ist } y = \pm b,$$

d. h. der Punkt B_1 und ebenso der zu ihm symmetrisch gelegene Punkt B_2 sind Punkte der Ellipse. Wenn nun x wächst, so wird $1 - \frac{x^2}{a^2}$ immer kleiner, also auch y, und wenn $x = a$ geworden ist, so ist $1 - \frac{x^2}{a^2} = 0$, also auch y; das Wertepaar

$$x = a, \; y = 0$$

liefert den Punkt A_2 der x-Axe, für den $OA_2 = a$ ist; ebenso gehört der zu ihm symmetrisch gelegene Punkt A_1 der Ellipse an. Wächst

*) B_1 ist, wie sich nachher ergeben wird, ein Ellipsenpunkt.

x noch mehr, so wird $\frac{x^2}{a^2} > 1$, also wird $1 - \frac{x^2}{a^2}$ negativ, und es kann daher einen reellen zugehörigen Wert von y nicht geben. Die Ellipsenpunkte liegen daher sämtlich in dem Streifen, den die beiden durch A_1 und A_2 parallel zur y-Axe gezogenen Geraden a_1 und a_2 einschliessen. Ebenso folgert man, dass sie sämtlich innerhalb desjenigen Streifens liegen, den zwei zur x-Axe durch B_1 und B_2 gelegte Parallelen b_1 und b_2 einschliessen. Die Ellipse liegt also, wie auch die Figur zeigt, in dem von a_1, a_2, b_1, b_2 gebildeten Rechteck.

Man nennt A_1A_2 die grosse Axe und B_1B_2 die kleine Axe der Ellipse. Die Längen dieser Axen sind $2a$ und $2b$; a und b selbst heissen Halbaxen. Die Punkte A_1, A_2, B_1, B_2 heissen die Scheitel; endlich werden F_1 und F_2 als die Brennpunkte bezeichnet. Sie liegen, da nach 2) $a > c$ ist, innerhalb der Ellipse.

§ 11. Aufgaben über die Ellipse. Die Directrix.

1. Wir betrachten (Fig. 18) eine Ellipse mit den Halbaxen a und b und einen Kreis über der grossen Axe der Ellipse als Durchmesser; ferner seien P resp. P' zwei senkrecht über einander liegende Punkte von Kreis und Ellipse. Diese Punkte haben gleiche Abscisse x, aber verschiedene Ordinaten, die wir mit y und y' bezeichnen. Dann besteht für x und y die Kreisgleichung und für x und y' die Ellipsengleichung, d. h. es ist

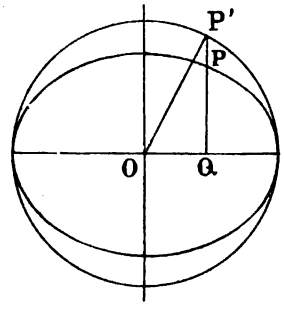


Fig. 18.

$$1)\quad x^2 + y^2 = a^2 \text{ oder } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \text{ und}$$

$$2)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Diese Gleichungen lassen sich in folgende Form setzen:

$$\frac{y^2}{a^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \text{ und } \frac{y'^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

und daraus folgt

$$3)\quad \frac{y^2}{a^2} = \frac{y'^2}{b^2};\ \frac{y'}{y} = \frac{b}{a},$$

resp. gemäss der Figur

$$\frac{P'Q}{PQ} = \frac{b}{a};$$

die Ordinaten von Ellipse und Kreis, die derselben Abscisse entsprechen, besitzen also ein konstantes Verhältnis, d. h. alle Ellipsenordinaten sind gegen die Kreisordinaten im selben Masse verkleinert.

2. Man soll die Abstände des Ellipsenpunktes P von den Brennpunkten F_1 und F_2 berechnen (Fig. 19). Für den Abstand PF_1 oder r_1 ergiebt sich nach § 9, 3

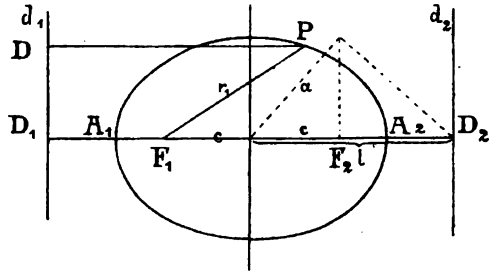


Fig. 19.

$$4)\quad r_1^2 = (c+x)^2 + y^2.$$

Für y^2 entnehmen wir aus der Ellipsengleichung den Wert

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

und setzen ihn in 4) ein; es folgt

$$r_1^2 = c^2 + 2cx + x^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Nun ist nach § 9, 8 $b^2 + c^2 = a^2$; ferner ist

$$x^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2,$$

also erhalten wir

$$r_1^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2, \text{ oder}$$

$$5)\quad r_1^2 = \left(a + \frac{c}{a}x\right)^2.$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich

$$6)\quad r_2^2 = \left(a - \frac{c}{a}x\right)^2.$$

Mithin ergeben sich für die Entfernungen PF_1 und PF_2 die Werte

$$7)\quad r_1 = a + \frac{c}{a}x,\ r_2 = a - \frac{c}{a}x.$$

Hieraus ziehen wir noch eine wichtige Folgerung. In dem Wert für r_1 stellen wir $\frac{c}{a}$ heraus und finden

$$8)\quad r_1 = \frac{c}{a}\left(x + \frac{a^2}{c}\right).$$

Setzen wir hier den Quotienten

$$9)\quad \frac{a^2}{c} = l, \text{ also } c : a = a : l,$$

so ist l eine Strecke, die durch a und c bestimmt ist, und die wir so zu konstruieren haben, dass sie Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks wird, in dem a eine Kathete und c ihre Projektion ist, wie es die Figur 19 zeigt. Da $c < a$ ist, so ist auch $a < l$. Diese Strecke tragen wir von O aus gleich OD_1 auf und ziehen durch D_1 eine Parallele zur y-Axe, und fällen auf sie von P das Lot PD, so ist, wie unmittelbar ersichtlich,

$$PD = x + l = x + \frac{a^2}{c},$$

und wenn wir dies in 8) einsetzen, so folgt

$$r_1 = \frac{c}{a} PD \text{ oder}$$

$$10) \quad \frac{PF_1}{PD} = \frac{c}{a}.$$

Die Gerade d_1 heisst Directrix der Ellipse; von ihr sagt die vorstehende Gleichung aus, dass für jeden Ellipsenpunkt das Verhältnis seiner Entfernungen vom Brennpunkt und von der Directrix den festen Wert $c : a$ hat.

Aus der Symmetrie der Ellipse folgt, dass auch zum Brennpunkt F_2 eine Directrix d_2 gehört, deren Abtand von O ebenfalls gleich l ist, und für die der gleiche Satz besteht.

§ 12. Die Gleichung der Hyperbel.

Die Hyperbel ist der geometrische Ort derjenigen Punkte, für welche die Differenz ihrer Entfernungen von zwei festen Punkten konstant ist. Der Wert dieser konstanten Differenz sei $2a$.

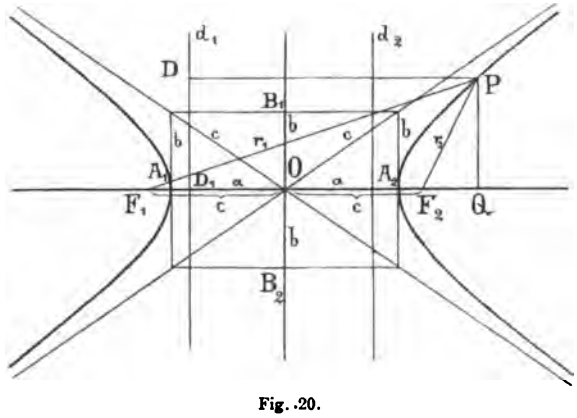


Fig. 20.

Wir nehmen wieder (Figur 20) die Verbindungslinie der festen Punkte F_1 und F_2 als x-Axe und das in ihrer Mitte O errichtete Lot als y-Axe. Wir bezeichnen die Strecke F_1F_2 wieder durch $2c$, und durch r_1 resp. r_2 die Entfernungen des Hyperbelpunktes P von F_1 und F_2, so dass die Gleichung

$$1) \quad r_1 - r_2 = 2a$$

besteht. Da in jedem Dreieck die Differenz zweier Seiten kleiner ist als die dritte, so folgt hier im Gegensatz zum vorigen Paragraphen, dass

$$2) \quad 2a < 2c$$

ist. Sind die Koordinaten von P wieder x und y, so ist, wie aus der Figur folgt,

$$3) \quad r_1^2 = (x+c)^2 + y^2,$$
$$4) \quad r_2^2 = (x-c)^2 + y^2.$$

Durch Quadrieren von 1) folgt zunächst

$$r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2 = 4a^2, \text{ oder}$$
$$r_1^2 + r_2^2 - 4a^2 = 2r_1r_2,$$

und durch nochmaliges Quadrieren

$$5) \quad (r_1^2 + r_2^2)^2 - 8a^2(r_1^2 + r_2^2) + 16a^4 = 4r_1^2r_2^2.$$

Dies ist die nämliche Gleichung, wie die Gleichung 5) in § 10. Aus ihr folgt wie dort

$$6) \quad (r_1^2 - r_2^2)^2 - 8a^2(r_1^2 + r_2^2) + 16a^4 = 0$$

und es ist nach Gleichung 3) und 4) zu setzen

$$r_1^2 + r_2^2 = 2(x^2 + y^2 + c^2),$$
$$r_1^2 - r_2^2 = 4cx.$$

Dies sind ebenfalls die gleichen Werte, wie in § 10, wir erhalten also wie dort zunächst

$$7) \quad x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

resp.

$$8) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Für die Hyperbel ist aber, wie wir oben bewiesen haben, $a < c$; es ist also $a^2 - c^2$ negativ. Konstruieren wir jetzt eine Linie b als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse c und dessen andere Kathete a ist, so dass

$$9) \quad c^2 = a^2 + b^2, \quad a^2 - c^2 = -b^2$$

ist, so können wir $a^2 - c^2$ durch $-b^2$ ersetzen, und erhalten die Gleichung der Hyperbel in der Endform

$$10) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Wir leiten uns zunächst wieder einige Folgerungen über die Gestalt der Hyperbel ab. Zunächst ergiebt sich genau wie im vorigen Paragraphen, dass die x-Axe und die y-Axe Symmetrieaxen der Hyperbel sind. Um den Verlauf der Hyperbel im ersten Quadranten kennen zu lernen, schreiben wir unsere Gleichung in die Form

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1,$$

und sehen, dass so lange $x < a$ ist, die linke Seite einen negativen Wert hat; für alle diese Werte x kann also ein zugehöriger Wert von y, resp. ein zugehöriger Hyperbelpunkt nicht existieren. Im besondern gilt dies auch für $x = 0$; d. h. die y-Axe enthält keinen Punkt der Hyperbel. Ist $x = a$, so ist die rechte Seite Null, das Wertepaar

$$x = a, \quad y = 0$$

giebt also den Punkt A_2 der positiven x-Axe, für den $OA_2 = a$ ist; ebenso gehört der Punkt A_1 der negativen x-Axe, für den $OA_1 = a$ ist, der Hyperbel an. Wächst x noch mehr, d. h. hat x irgend einen Wert $x > a$, so ist y stets reell und wächst ununterbrochen mit x, die Hyperbel erstreckt sich also in jedem Quadranten unbegrenzt weit, während sie zugleich ununterbrochen ansteigt, wie es die nebenstehende Figur sehen lässt.

Man nennt A_1A_2 die reelle Axe der Hyperbel, und nennt die y-Axe — der Analogie halber — die imaginäre Axe. Die Punkte A_1 und A_2 heissen Scheitel; a heisst reelle und b imaginäre Halbaxe; man kann auch b auf auf der y-Axe bis B_1 resp. B_2 abtragen. F_1 und F_2 heissen wieder Brennpunkte.

§ 13. Die Directrix der Hyperbel.

Wir berechnen auch für die Hyperbel die Abstände irgend eines ihrer Punkte von den Brennpunkten und entnehmen daraus den analogen Satz wie für die Ellipse.

Für den Abstand PF_1 oder r_1 ergiebt sich nach § 11, 8

$$1) \quad r_1^2 = (x + c)^2 + y^2.$$

Für y^2 entnehmen wir aus der Hyperbelgleichung den Wert

$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2$$

und erhalten, wenn wir ihn in 1) einsetzen,

$$r_1^2 = x^2 + 2cx + c^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2.$$

Nun ist nach § 11, 9 $c^2 - b^2 = a^2$ und $x^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}x^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2$, setzen wir dies ein, so folgt

$$r_1^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2 \text{ oder}$$

$$2) \quad r_1^2 = \left(\frac{c}{a}x + a\right)^2.$$

Ebenso ergiebt sich

$$3) \quad r_2^2 = (\frac{c}{a}x - a)^2,$$

also ist

$$4) \quad r_1 = \frac{c}{a}x + a, \quad r_2 = \frac{c}{a}x - a.$$

In dem Wert von r_1 stellen wir wieder $\frac{c}{a}$ heraus und erhalten

$$5) \quad r_1 = \frac{c}{a}(x + \frac{a^2}{c}).$$

Setzen wir den Quotienten

$$6) \quad \frac{a^2}{c} = l, \text{ also } c : a = a : l,$$

so ist l eine Strecke, die durch a und c genau ebenso bestimmt ist, wie die analoge Strecke in § 10, nur dass jetzt, weil $c > a$, auch $a > l$ ist. Diese Strecke tragen wir wieder von O aus gleich OD_1 auf, ziehen durch D_1 die Parallele d_1 zur y-Axe, und fällen auf sie von P das Lot PD, so ist wieder

$$PD = x + l = x + \frac{a^2}{c},$$

und wenn wir dies in 5) einsetzen, so folgt

$$7) \quad \frac{PF_1}{PD} = \frac{c}{a}.$$

Die Gerade d_1 heisst wieder Directrix der Hyperbel; für jeden Hyperbelpunkt steht die Entfernung vom Brennpunkt zur Entfernung von der Directrix in dem festen Verhältnis $c : a$. Zum Brennpunkt F_2 gehört eine Directrix d_2, für die der gleiche Satz besteht.

§ 14. Die gleichseitige Hyperbel und ihre Asymptotengleichung.

Nimmt man an, dass beide Axen $2a$ und $2b$ einer Ellipse einander gleich werden, so geht die Ellipse in den Kreis über; der Kreis stellt also den einfachsten Fall der Ellipse dar. Setzt man in der Gleichung der Hyperbel $a = b$, so ergiebt sich ebenfalls eine besonders einfache Hyperbel; man nennt sie gleichseitige Hyperbel. Ihre Gleichung wird

$$1) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1, \text{ resp. } x^2 - y^2 = a^2.$$

Wir bezeichnen die Halbierungslinien der Koordinatenaxen als die Asymptoten dieser Hyperbel, und stellen uns die Aufgabe, diejenige

Gleichung der gleichseitigen Hyperbel zu suchen, für welche die Asymptoten als Koordinatenaxen gewählt werden.

Um diese Aufgabe zu behandeln, schicken wir folgende Hilfsbetrachtung voraus. Wir denken uns irgend zwei durch O gehende Geraden (Fig. 21), die wir als Axen eines neuen Koordinatensystems betrachten. Die Koordinaten eines beliebigen Punktes P in Bezug auf sie nennen wir ξ und η. Wir ziehen PQ senkrecht zur x-Axe und PR senkrecht zur ξ-Axe, sodass $RPQ = ROQ = \alpha$ und

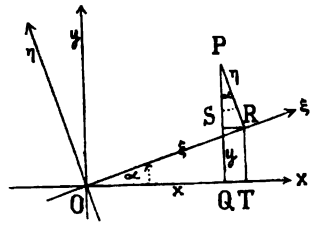


Fig. 21.

$$2) \quad OQ = x, \; PQ = y, \; OR = \xi, \; PR = \eta,$$

und ziehen noch RT senkrecht und RS parallel zur x-Axe. Alsdann folgt

$$x = OQ = OT - TQ = OT - RS,$$
$$y = PQ = PS + QS = PS + RT.$$

Nun folgt aber aus den Dreiecken ORT und PRS

$$OT = \xi \cos\alpha, \; RS = \eta \sin\alpha,$$
$$RT = \xi \sin\alpha, \; PS = \eta \cos\alpha,$$

folglich erhalten wir durch Einsetzen dieser Werte

$$3) \quad \begin{aligned} x &= \xi \cos\alpha - \eta \sin\alpha, \\ y &= \xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha, \end{aligned}$$

und dies sind die Gleichungen, die zeigen, wie die Koordinaten eines Punktes P bezüglich des einen Axensystems mit seinen Koordinaten für das zweite Axensystem zusammenhängen.

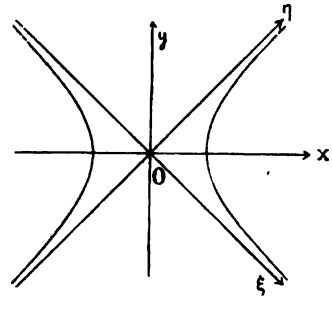


Fig. 22.

Hiervon haben wir jetzt (Fig. 22) Anwendung zu machen. In unserem Fall ist (S. 11) $\alpha = -45^0$, daher $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sin\alpha = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ und wir erhalten für diesen speziellen Fall die Gleichungen

$$4) \quad \begin{aligned} x &= \xi\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \eta\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \\ y &= -\xi\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \eta\sqrt{\tfrac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Aus ihnen folgt durch Addition und Subtraktion

$$5) \quad x - y = 2\xi\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \; x + y = 2\eta\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Denken wir uns jetzt, dass P ein Punkt der Hyperbel ist, so genügen seine Koordinaten x und y der Gleichung

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

die wir auch in die Form

$$6) \quad (x+y)\,(x-y) = a^2$$

setzen können. Führen wir hier die vorstehenden Werte ein, so erhalten wir zwischen den Koordinaten $\xi\eta$ desselben Punktes P die Gleichung

$$7) \quad 2\xi\eta = a^2,$$

und da dieser Gleichung die Koordinaten eines beliebigen Hyperbelpunktes P genügen, so gilt dies von jedem ihrer Punkte, d. h. diese Gleichung ist die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel, bezogen auf die Asymptoten als Koordinatenaxen.

Wir erkennen hieraus bereits die Richtigkeit der in § 1 enthaltenen Behauptung, dass das Mariotte'sche Gesetz graphisch durch eine Hyperbel dargestellt wird. Ersetzen wir ξ durch p, η durch v, und setzen im besondern $\frac{a^2}{2} = 1$, so geht die Gleichung in $vp = 1$ über.

Wir fügen noch folgende Bemerkung an, die die geometrische Eigenschaft der Asymptoten betrifft. Schreiben wir die Gleichung 7) in die Form

$$\eta = \frac{a^2}{2\xi},$$

so sehen wir, dass η um so kleiner wird, je grösser ξ wird, d. h. die Hyperbel nähert sich, je weiter sie läuft, mehr und mehr der ξ-Axe. Ist im besondern $\xi = \infty$, so ist $\eta = 0$, im Unendlichen wird also die ξ-Axe von der Hyperbel, resp. die Hyperbel von der ξ-Axe wirklich erreicht. Das gleiche gilt für die η-Axe. Dies ist der Grund, aus dem man die ξ-Axe und die η-Axe Asymptoten der Hyperbel genannt hat; beide Geraden nähern sich der Hyperbel immer mehr, je weiter sie verläuft, erreichen sie aber erst im Unendlichen.*)

§ 15. Die Transformation der Koordinaten.

Wir haben die im vorstehenden Paragraphen behandelte Aufgabe dadurch erledigt, dass wir ein neues Koordinatensystem eingeführt haben. Die Einführung neuer Koordinatensysteme ist in vielen Fällen von grosser Wichtigkeit. Die Lage der Koordinatenaxen ist ja durchaus beliebig, andrerseits ist ersichtlich, dass es für jede Kurve, resp. für jede geometrische Betrachtung eine zweckmässigste Lage geben wird. Welche dieses ist, lässt sich in vielen Fällen erst dann erkennen,

*) Für eine beliebige Hyperbel gelten ähnliche Sätze. Vgl. darüber Kap. VI.

wenn man bereits die bezügliche Kurvengleichung für ein beliebig angenommenes Axensystem abgeleitet hat.

Wir müssen uns daher mit Formeln bekannt machen, die uns in den Stand setzen, aus den Gleichungen für eines von zwei Koordinatensystemen diejenigen für das andere abzuleiten.

Zunächst nehmen wir an, dass die Axen beider Systeme einander parallel sind. Sei z. B. in Figur 7 (S. 8) M der Mittelpunkt eines Koordinatensystems, dessen Axen in die Richtung MR und MN fallen, und es seien

$$1) \quad X = MR, \quad Y = PR$$

die Koordinaten des Punktes P für dieses Axensystem. Ferner seien

$$2) \quad x = OQ, \quad y = PQ$$

die Koordinaten des Punktes P für dasjenige Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt O ist, endlich

$$3) \quad a = ON, \quad b = MN$$

die Koordinaten des Punktes M in diesem Koordinatensystem. Alsdann bestehen zwischen den Koordinaten x, y und X, Y desselben Punktes P, wie aus der Figur folgt, die Gleichungen

$$4) \quad X = x - a, \quad Y = y - b.$$

Diese Gleichungen gelten für jeden Punkt.

Denkt man sich nun die Gleichung des Kreises für die Koordinatenaxen X, Y, so lautet sie

$$5) \quad X^2 + Y^2 = r^2,$$

wenn r den Radius des Kreises darstellt. Diese Gleichung gilt unter anderem auch für den Punkt P. Setzen wir in sie für X und Y ihre Werte aus 4), so erhalten wir

$$6) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

als diejenige Gleichung, der die Koordinaten x, y des Kreispunktes P genügen, und dies ist daher die Gleichung des Kreises für das Axensystem der x, y. Die nämliche Gleichung haben wir in § 4 (S. 9) auf andere Weise abgeleitet.

Nehmen wir die neuen Axen so an, dass sie denselben Anfangspunkt haben, wie die alten, aber andere Richtung, so treten die Formeln in Kraft, die wir bereits im vorigen Paragraphen abgeleitet haben, und die wir der Vollständigkeit halber hier noch einmal hersetzen; sie lauten:

$$7) \quad \begin{aligned} x &= \xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha, \\ y &= \xi \sin\alpha - \eta \cos\alpha, \end{aligned}$$

aus ihnen folgt noch, wenn wir beide Gleichungen zuerst mit $\cos\alpha$,

resp. sin α multiplizieren und dann addieren, und dann ebenso mit sin α, — cos α*)

$$8) \quad \begin{aligned} \xi &= x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ \eta &= x\sin\alpha - y\cos\alpha. \end{aligned}$$

Die Koordinaten x, y und ξ, η drücken sich also in ganz gleicher Weise durch einander aus.

Soll man endlich von einem Koordinatensystem zu einem andern mit neuem Anfangspunkt und andern Axenrichtungen übergehen, so hat man zwei Koordinatentransformationen nacheinander auszuführen.

Die Benutzung der Koordinatenverlegung ist eines der wichtigsten Hilfsmittel in der reinen Mathematik. Mit ihrer Hilfe erkennt man z. B., dass jede Gleichung

$$9) \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

— von Ausnahmefällen abgesehen — eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel darstellt. Der Beweis beruht darauf, dass man das ursprünglich unsymmetrisch gegen diese Kurven liegende Koordinatensystem so ändern kann, dass diese Gleichung in die von uns für Ellipse, Hyperbel, Parabel abgeleiteten Gleichungen übergeht.

§ 16. Die Gleichung von van der Waals.

Die bisher diskutierten Kurven waren solche, in deren Gleichungen die Koordinaten nur im ersten oder zweiten Grade auftraten; es liegt ausserhalb des Rahmens unserer Betrachtungen, allgemeine Erörterungen über die Theorie solcher Kurven zu bringen, in deren Gleichungen die Koordinaten im dritten oder höheren Grade vorkommen. Wohl aber wollen wir wenigstens einige hieher gehörige Beispiele kurz besprechen.

Die S. 2 besprochene Gleichung des Boyle-Mariotte'schen Gesetzes gilt nur für nicht zu stark komprimierte Gase; um auch das Gebiet der stark komprimierten Gase zu umfassen, hat van der Waals die berühmte, nach ihm benannte Gleichung**)

$$1) \quad \left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = 1$$

aufgestellt, in der a und b der betrachteten Gasmasse eigentümliche (positive) Konstanten sind. Betrachten wir darin das Volumen v und den Druck p als Koordinaten, so können wir sie durch eine Kurve darstellen, deren Gleichung, wenn wir noch mit v^2 multiplizieren, die Form

*) Vgl. Formel 32 des Anhangs.

**) Vgl. z. B. Nernst, theoretische Chemie S. 182.

$$2) \quad (pv^2 + a)\,(v - b) = v^2$$

oder in x und y geschrieben

$$3) \quad (yx^2 + a)\,(x - b) = x^2$$

annehmen würde.*) Dieses Gesetz wollen wir nun diskutieren.

Bringen wir die Gasmasse auf ein grosses Volumen, lassen wir also v sehr gross werden, so wird in Gleichung 1) $\frac{a}{v^2}$ sehr klein, so dass wir es neben p vernachlässigen können, und andrerseits verschwindet b neben v, d. h. wir erhalten

$$pv = 1,$$

mit anderen Worten: für stark verdünnte Gase geht die Gleichung von van der Waals in diejenige von Boyle über.

Ist v hingegen nicht sehr gross, d. h. das Gas nicht sehr verdünnt, so wird der Einfluss der Konstanten a und b merklich; machen wir v sehr klein, indem wir den auf die Gasmasse wirkenden Druck p sehr gross werden lassen, so wird v sich b immer mehr nähern, und wird p ungeheuer gross, so muss v an b heranrücken. Die Konstante b giebt also das kleinste Volumen an, bis zu dem die Gasmasse durch Druck gebracht werden kann, ein kleineres Volumen als b ist nach obiger Gleichung nicht möglich.

Um die Verhältnisse am anschaulichsten zu übersehen, nehmen wir wiederum zur graphischen Darstellung unsere Zuflucht, und zwar knüpfen wir an ein spezielles Beispiel an. Für Kohlensäure ist

$$a = 0{,}00874; \quad b = 0{,}0023$$

und somit wird

$$\left(p + \frac{0{,}00874}{v^2}\right)(v - 0{,}0023) = 1.$$

Der Druck p ist in Atmosphären zu zählen; setzen wir $p = 1$, so liefert obige Gleichung einen Wert für das Volumen, der sich leicht zu 0,9936 berechnet. Als Einheit des Volumens liegt somit der $\frac{1}{0{,}9936}$fache Wert desjenigen zu Grunde, das die betrachtete Gasmasse bei 1 Atmosphärendruck einnimmt.

Berechnen wir nach der vorstehenden Gleichung die Werte von p, die den in der nachfolgenden Tabelle verzeichneten Werten von v entsprechen, so finden wir

---

*) Da sich beim Ausmultiplizieren ein Glied yx^3 ergiebt, in dem x und y zusammen im vierten Grad auftreten, nennt man die Kurve eine solche vierter Ordnung.

v	p	v	p
0,1	9,4	0,008	38,8
0,05	17,5	0,005	20,9
0,015	39,9	0,004	42,0
0,01	42,6	0,003	457

und die graphische Auftragung liefert das in Fig. 23 wiedergegebene Bild.

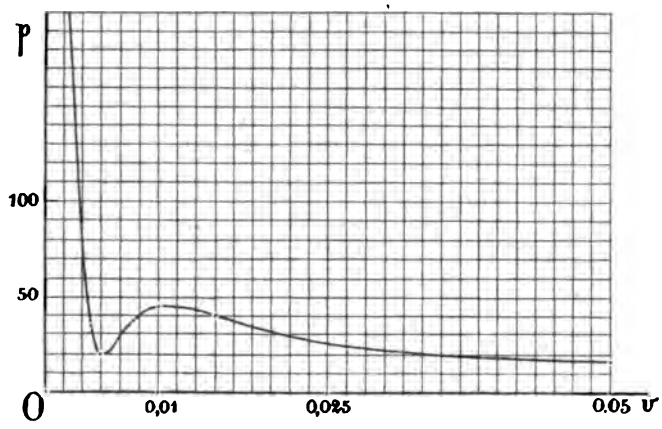


Fig. 23.

Die besprochene Gleichung

$$\left(p + \frac{0{,}00874}{v^2}\right)(v - 0{,}0023) = 1$$

gilt für Kohlensäure von 0^0; für Kohlensäure von der Temperatur t gilt nach van der Waals

$$\left(p + \frac{0{,}00874}{v^2}\right)(v - 0{,}0023) = 1 + \frac{t}{273};$$

geben wir in dieser Gleichung t verschiedene Werte (z. B. 13,1, 21,5 u. s. w.), so können wir für jeden Wert von t in ganz ähnlicher Weise, wie oben geschehen, die dazu gehörige Kurve zeichnen. Diese Kurvenschar (Fig. 24) giebt uns dann ein anschauliches Bild von dem Verhalten der Kohlensäure unter den verschiedensten Bedingungen des Drucks, Volumens und der Temperatur und aus ihrer Betrachtung konnte van der Waals die weitgehendsten Schlüsse über das Verhalten der Materie im stärker kondensierten, sei es gasförmigen, sei es flüssigen Zustande ziehen.

§ 17. Die Gleichung der Dissociationsisotherme.

Viele Gase oder gelöste Stoffe erleiden bei zunehmender Verdünnung eine immer fortschreitende Dissociation. Wenn ein Molekül sich in zwei neue dissociiert, so gilt für den Dissociationsgrad y (= Zahl der dissociierten Moleküle, dividiert durch die Zahl der Moleküle, die bei nicht vorhandener Dissociation vorhanden sein würden) die Gleichung*)

$$c = K\frac{(1-y)}{y^2}, \quad (1)$$

worin c die Konzentration, d. h. die in der Volumeinheit enthaltene Substanzmenge (man zählt sie übrigens gewöhnlich nach Gramm-Molekülen) und K eine Konstante, die sogenannte Dissociationskonstante, bedeutet. Die Bedeutung der letzteren ergiebt sich leicht, wenn wir $y = 0{,}5$ setzen; dann wird

$$c = 2K,$$

d. h. die physikalische Bedeutung der Grösse K besteht darin, dass sie die Hälfte derjenigen Konzentration angiebt, bei welcher gerade die Hälfte der Substanz dissociiert ist.

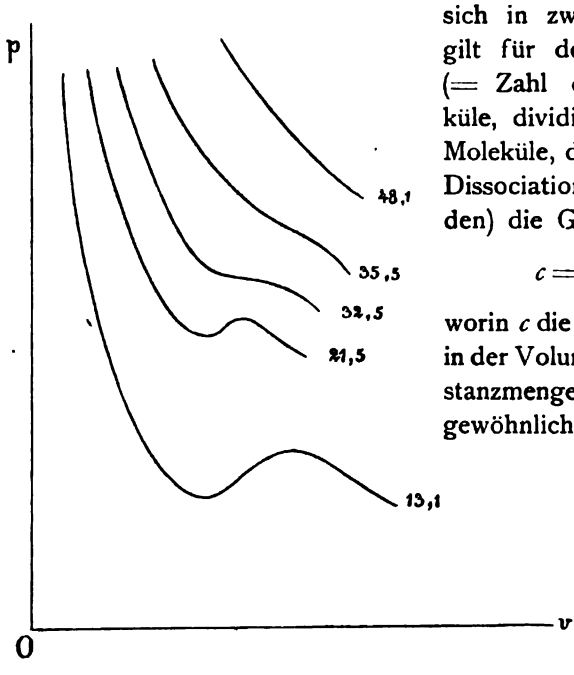


Fig. 24.

Um uns über die Natur der in chemischer Hinsicht sehr wichtigen Gleichung (1) eine Anschauung zu verschaffen, tragen wir c als Abscisse, y als Ordinate graphisch auf. In Fig. 25 ist für die Zeichnung der Wert $K = 1$ zu Grunde gelegt. Für kleine Werte von c ist y sehr nahe gleich 1, d. h. wir haben vollständige Dissociation; für wachsende c sinkt y beständig, um sich

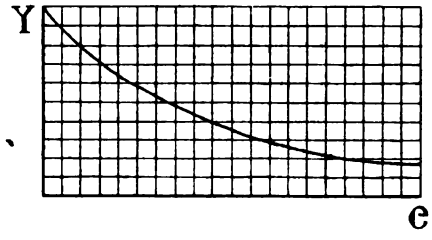


Fig. 25.

*) Vgl. z. B. Nernst, Theoret. Chemie S. 348 und 366.

für sehr grosse Werte von c allmählich oder, wie man es bezeichnet, »asymptotisch« dem Grenzwert 0 zu nähern.

§ 18. Die Polarkoordinaten.

Die in § 2 auseinandergesetzte Methode, Punkte der Ebene durch Koordinaten zu bestimmen, ist nicht die einzig mögliche. Solcher Bestimmungsweisen giebt es vielmehr unzählig viele; eine von ihnen müssen wir noch kennen lernen. Denken wir uns (Fig. 26) um O eine Reihe von Kreisen gezeichnet, und ziehen durch O beliebig viele gerade Linien, so entsteht eine Reihe von Schnittpunkten, und jeder einzelne dieser Punkte, z. B. P_1 oder P_2, ist seiner Lage nach bestimmt, wenn wir seinen Abstand r_1 resp. r_2 von O, und den Winkel φ_1 resp. φ_2 kennen, den dieser Abstand P_1O resp. P_2O mit einer festen durch O gehenden Axe OX einschliesst. Es entspricht also genau in dem oben § 2 angegebenen Sinn jedem Punkt P ein Zahlenpaar, nämlich die Länge von r und die Grösse von φ, und umgekehrt ist irgend ein Zahlenpaar r und φ gegeben, so lässt sich stets ein Punkt P zeichnen dessen Lage in der Ebene durch r und φ bestimmt ist. Die Grössen r und φ nennt man die Polarkoordinaten des Punktes P.

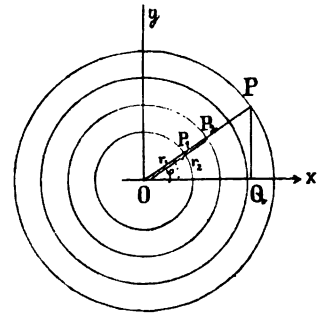


Fig. 26.

Die Polarkoordinaten benutzen zur Bestimmung eines Punktes ein System von konzentrischen Kreisen und ein System von Geraden durch ihren Mittelpunkt, genau in demselben Sinn, wie sich nach § 9 die rechtwinkligen Koordinaten an zwei Systeme paralleler Geraden knüpfen. Dies ist bei tieferer Auffassung das allgemeine Prinzip jeder Koordinatenbestimmung, die in der höheren Mathematik benutzt wird.

Zwischen den Polarkoordinaten und den rechtwinkeligen Koordinaten, für die OX die x-Axe und O den Anfangspunkt darstellt, bestehen, wie aus dem Dreieck OPQ folgt, die einfachen Beziehungen

$$1) \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

$$2) \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Aus diesen Gleichungen kann man die rechtwinkeligen Koordinaten berechnen, wenn die Polarkoordinaten bekannt sind, umgekehrt aber auch die Polarkoordinaten, wenn man die rechtwinkeligen kennt.

Um eine Anwendung zu geben, wollen wir die Gleichungen von Ellipse, Parabel und Hyperbel in Polarkoordinaten ableiten. Aus § 5, 11, 13 folgt, dass sich Ellipse, Parabel und Hyperbel gemeinsam als geometrischer Ort eines Punktes definieren lassen, für den die Entfernung von einem festen Punkt (dem Brennpunkt) und die Entfernung von einer festen Geraden (der Directrix) in einem konstanten Verhältnis stehen. Für die Ellipse ist dieses Verhältnis kleiner als 1 (da $c < a$), für die Hyperbel ist es grösser als 1 (da $c > a$) und für die Parabel ist es gleich 1 (da beide Entfernungen für die Parabel einander gleich sind).

Wir bezeichnen (Fig. 27) den Abstand des festen Punktes F_1 von der festen Geraden d_1 durch p, und den Wert des konstanten Verhältnisses durch e und können alsdann die Gleichung aller drei Kurven auf die gleiche Weise ableiten. Wir wählen F_1 zum Anfangspunkt der Polarkoordinaten und das von F_1 auf d_1 gefällte Lot F_1L als Axe; ihre positive Hälfte soll diejenige sein, die die Gerade d_1 nicht schneidet. Die definierende Gleichung lautet:

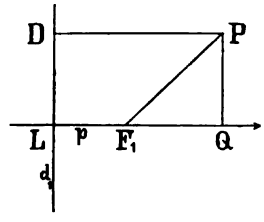


Fig. 27.

$$\frac{PF_1}{PD} = e.$$

Sind dann r und φ die Polarkoordinaten von P und ist PQ das von P auf die Axe gefällte Lot, so ist

$$PD = LF_1 + F_1Q = p + r\cos\varphi,$$

also erhalten wir sofort die gesuchte Gleichung in der Form

$$3)\quad \frac{r}{p + r\cos\varphi} = e,$$

die nach einer geringen Umformung in

$$4)\quad r = \frac{ep}{1 - e\cos\varphi}$$

übergeht. Für die Ellipse im besondern ist (§ 10, vgl. Fig. 19)

$$e = \frac{c}{a},\ p = l - c = \frac{a^2}{c} - c = \frac{a^2 - c^2}{c} = \frac{b^2}{c},$$

also wird ihre Gleichung

$$5)\quad r = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{c}{a}\cos\varphi}.$$

Für die Hyperbel ist (§ 12, vgl. Fig. 20)

$$e=\frac{c}{a},\quad p=c-l=c-\frac{a^2}{c}=\frac{c^2-a^2}{c}=\frac{b^2}{c},$$

also ist ihre Gleichung ebenfalls

$$6)\quad r=\frac{\frac{b^2}{a}}{1-\frac{c}{a}\cos\varphi}$$

und für die Parabel folgt, da $e=1$, als Gleichung

$$7)\quad r=\frac{p}{1-\cos\varphi},$$

wo p der Parameter der Parabel ist.

Die Thatsache, dass die Gleichungen der Ellipse, Parabel und Hyperbel in Polarkoordinaten die nämliche Form haben, ist von grosser Wichtigkeit für die Astronomie, insbesondere für die Bestimmung der Kometenbahnen. Jeder Komet beschreibt eine Ellipse, eine Hyperbel oder eine Parabel, für die die Sonne ein Brennpunkt ist. Die Bahn hat also jedenfalls die Gleichung 4) als ihre Gleichung; die in ihr auftretenden Grössen p und e sind aus den Beobachtungen über die einzelnen Stellungen des Kometen am Himmel zu ermitteln. Je nachdem sich nun für e ein Wert ergiebt $e<1$, $e=1$ oder $e>1$, weiss man, dass der Komet eine Ellipse beschreibt, oder eine Parabel, resp. Hyperbel. Im ersten Fall bewegt er sich periodisch um die Sonne, im andern jedoch ist er nur ein einmaliger, vorübergehender Gast unseres Sonnensystems.

Fünf Beobachtungen genügen, um über die Bahn zu entscheiden. Zwei Stellen des Kometen bestimmen mit der Sonne zusammen die Ebene, in der er sich bewegt, die drei andern sind nötig, um die drei noch übrigen Unbekannten, die Richtung der Axe, sowie p und e zu bestimmen.

§ 19. Die Spirale des Archimedes.

Endlich wollen wir an einem letzten Beispiel zeigen, wie sich Kurven, deren Gleichungen in rechtwinkligen Koordinaten kompliziert ausfallen, in Polarkoordinatenausserordentlich einfach darstellen. Solche Kurven sind die Spiralen, von denen die in der Technik häufig auftretende Archimedische Spirale die Gleichung

$$r=a\varphi$$

besitzt. Um diese Kurve zu erörtern, messen wir zweckmässig den Winkel φ nicht nach Graden, sondern durch die Länge des zugehörigen

Kreisbogens auf einem Einheitskreis, wie dies in § 3 des dritten Kapitels ausführlich auseinandergesetzt wird. Denken wir uns (Fig. 28) zwei Punkte P_1 und P_2 der Spirale, die zu zwei Winkeln φ_1 und φ_2 gehören, die sich um 2π unterscheiden, so liegen sie auf einer und derselben von O ausgehenden Geraden. Für sie ist

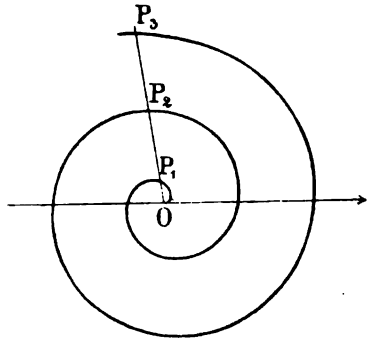


Fig. 28.

$$r_1 = a\varphi_1, \quad r_2 = a\varphi_2$$

und daraus folgt sofort

$$r_2 - r_1 = a(\varphi_2 - \varphi_1) = 2a\pi.$$

Setzen wir diese Betrachtung fort, so finden wir ohne Mühe, dass auf jeder durch O gehenden Geraden unzählig viele Punkte P_1, P_2, P_3, P_4..... liegen, zu den Winkeln φ_1, $\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi$, $\varphi_3 = \varphi_1 + 4\pi$, $\varphi_4 = \varphi_1 + 6\pi$..., gehörig, und dass für ihre Entfernungen von O die Gleichungen

$$r_2 = r_1 + 2a\pi, \quad r_3 = r_1 + 4a\pi, \quad r_4 = r_1 + 6a\pi.....$$

bestehen. Da dies für jede von O ausgehende Richtung gilt, so besteht die Spirale aus unendlich vielen Windungen, die in dem unveränderlichen Abstand $2a\pi$ umeinander herumlaufen. Gerade dies ist diejenige Eigenschaft, auf der die Anwendungen beruhen. Da für $\varphi = 0$ auch $r = 0$ ist, so beginnt die Spirale ihren Lauf in O selbst. Die Grösse a bestimmt sich leicht dadurch, dass für $\varphi = 1$, d. h. also für einen Winkel von 57^0, $17'$ $45''$ (vgl. S. 60) $r = a$ wird, wie dies die Figur 28 zeigt.

Zweites Kapitel.

Die Grundbegriffe der Differentialrechnung.

§ 1. Die Prinzipien der höheren Mathematik und die naturwissenschaftliche Vorstellungsart.

Die Methoden der Differentialrechnung finden ihre Hauptanwendung auf solche Naturvorgänge, bei denen die Eigenschaften und Zustände der Körperwelt in einer ununterbrochenen Veränderung begriffen sind. Als Isaac Newton seine »Fluxionstheorie« erdachte und damit den Grund zu dem Lehrgebäude der Differentialrechnung legte*), mochte er freilich noch nicht ahnen, dass aus seinen Ideen für die theoretische Naturerkenntnis ein Hilfsmittel von so fruchtbarer Kraft erwachsen würde, wie kein zweites. Aber in den 200 Jahren, die seitdem verflossen sind, haben sich jene Ideen immer weitere Gebiete der Naturwissenschaften unterworfen; die Methoden, die Newton und Leibniz**) schufen, haben allmählich ihre Herrschaft über das ganze Reich der Naturbetrachtung ausgedehnt, soweit Mass und Zahl darin eine Rolle spielen, oder vielmehr soweit es gelungen ist, sie auf Mass und Zahl zurückzuführen.

Die Eigenart der Probleme, auf die sich die Forschungsmethoden der höheren Mathematik mit Erfolg anwenden lassen, können wir am besten kennzeichnen, wenn wir uns überlegen, welche Fragen uns bei der Betrachtung eines Naturprozesses vor allem entgegentreten.

---

*) Die ersten Ideen von Newton (1642—1713) gehen bis in das Jahr 1665 zurück, veröffentlicht wurden seine Arbeiten erst nach seinem Tode.

**) G. Leibniz (1646—1716) verdanken wir die Schaffung des noch jetzt gebräuchlichen Algorithmus der Differentialrechnung. Seine ersten Studien hierüber — wahrscheinlich ohne Kenntnis der Newton'schen Resultate angestellt — stammen aus dem Jahr 1676, die erste auf sie bezügliche Publikation aus dem Jahr 1683.

In welcher Art auch ein Naturvorgang ablaufen mag, so pflegt unser Forschungstrieb erst dann befriedigt zu sein, wenn wir zweierlei ermittelt haben, wenn wir nämlich einerseits das Gesetz kennen, das den Gesamtverlauf des Vorgangs beherrscht, und wenn wir andrerseits wissen, was sich bei diesem Vorgang in jedem einzelnen Augenblick abspielt, und was ihn dabei wirkend bestimmt. Gerade in das innere Getriebe der Erscheinungen Einsicht zu gewinnen, und damit einen Blick in das »Innere der Natur« zu thun, ist stets Ziel und Wunsch aller derer gewesen, die ihre Kraft dem Fortschritt des Naturerkennens gewidmet haben.

Da alles, was einen und denselben Naturprozess betrifft, durch ein einziges einheitliches Gesetz unter sich verbunden ist, so muss der Gesamtverlauf des Prozesses und das, was sich in seinen einzelnen Phasen abspielt, in einer causalen Verbindung mit einander stehen. Das eine ist durch das andere bedingt. Hier ist die Stelle, wo die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften mit Erfolg einsetzt. Kennt man nämlich den Gesamtverlauf des Prozesses, so kann man durch blosse Rechnung die Frage nach seinen momentanen Zuständen und Eigenschaften beantworten, ebenso kann man umgekehrt das Gesamtgesetz durch Rechnung ableiten, wenn die Gesetzmässigkeit des Geschehens für jeden Augenblick bekannt ist. Hierin liegt die hohe Bedeutung, die die Methoden der höheren Mathematik für das gesamte Naturgeschehen besitzen.

Einige Beispiele mögen hier eine Stelle finden, zunächst solche, in denen wir von der Natur und Wirkungsweise des momentanen Geschehens ausgehen — sei es, dass wir sie aus Thatsachen kennen, oder auf Grund von Hypothesen oder Theorien postulieren — und die Aufgabe zu lösen haben, aus ihr das Gesetz zu ermitteln, das den Verlauf des gesamten Prozesses ausdrückt. So hat Fresnel aus seinen bekannten Annahmen über die Natur der Aetherbewegung in Krystallen durch mathematische Deduktionen die Gesetze der Doppelbrechung abgeleitet, so haben Guldberg und Waage, von der allgemeinen Geltung ihres Massenwirkungsgesetzes ausgehend, die Formeln aufgestellt, nach denen der Verlauf eines chemischen Vorganges und der Endzustand, zu dem er führt, sich regelt; so hat Fourier, von der Vorstellung ausgehend, dass der Wärmestrom dem Temperaturgefälle proportional ist, die Wärmeströmung in beliebigen Wärmeleitern zu berechnen gelehrt.

Um Beispiele umgekehrter Art zu nennen, so weisen wir zunächst auf die Aufgabe hin, der Newton gegenüberstand, nachdem er die

Idee der allgemeinen Gravitation ersonnen hatte. Die Kepler'schen Gesetze hatten ihn zu der Theorie geführt, dass die Bewegung aller Planeten gegen einander und gegen die Sonne auf Kräften beruht, deren momentane Wirkungsweise von ihrer gegenseitigen Entfernung abhängt; aber welchem bestimmten Gesetz diese Kräfte in jedem Augenblick gehorchen, nämlich, dass die Wirkung gerade dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional ist, diese Thatsache hat Newton aus den Formeln durch Rechnung erschliessen müssen. Ein ähnliches Problem hatte Ampère zu lösen, als er die Wirkung galvanischer Ströme aufeinander untersuchte. Die Beobachtung hatte ihm die Wirkung der ganzen Stromkreise aufeinander geliefert; hieraus musste er die Wirkung der einzelnen Stromteile aufeinander durch Rechnung ableiten, um zu dem von ihm aufgestellten Gesetze zu gelangen.

Welches sind denn nun die Vorstellungen, die uns in den Stand setzen die Behandlung der Naturvorgänge unter die Herrschaft der mathematischen Methoden zu zwingen? Welches sind die mathematischen Hilfsmittel, vermöge deren es uns gelingt, von dem Gesamtgesetz auf den einzelnen Moment und von dem einzelnen Moment auf das Gesamtgesetz mit unmittelbarer Sicherheit zu schliessen? Diese Methoden zu lehren ist der Zweck des vorliegenden Buches.

Charakteristisch für sie sind einige eigenartige Vorstellungen und Begriffe, die von grundlegender Bedeutung sind. Es ist eine weitverbreitete Meinung, dass sie dem Verständnis grosse Schwierigkeiten bereiten; wir dürfen aber mit Fug und Recht behaupten, dass dies nicht der Fall ist. Bei präziser Formulierung verschwinden diese Schwierigkeiten so gut wie ganz; soweit sie dennoch vorhanden sind, betreffen sie jedoch nicht das mathematische Verfahren, sondern vielmehr die eigenste Natur des physikalischen oder chemischen Vorgangs, dem die Methoden und Begriffe der höheren Mathematik so getreu nachgebildet sind, wie die Photographie dem Gegenstand, dessen Bild sie darstellt. Sie entsprechen genau der Art, auf die wir uns auch sonst die Naturvorgänge für unser Verständnis zurecht zu legen pflegen. Wir haben bereits darauf hingewiesen, dass wir es hier stets mit Naturprozessen zu thun haben, bei denen die Eigenschaften und Zustände der Körperwelt in einer ununterbrochenen Veränderung begriffen sind. Wenn ein Planet unter dem Einfluss einer stets wechselnden Kraft die Sonne umkreist, wenn die Luft, indem sie den Schall, oder der Aether, indem er das Licht fortpflanzt, durch ihre Oscillationen wechselnde Verdünnungs- und Verdichtungszustände bewirken, wenn bei der Explosion eines Knallgasgemisches die Temperatur in rapider

Steigung ein Maximum erreicht, um sofort wieder mit grosser Geschwindigkeit zu fallen, so handelt es sich immer um Erscheinungen, bei denen jeder Augenblick das Bild, das die vorangehende bietet, schon wieder verändert hat. Um uns diese Erscheinungen begreiflich zu machen, pflegen wir die Naturprozesse in »elementare Bestandteile« zu zerlegen, in lauter kleine Einzelvorgänge, die eine minimale Zeit andauern und für die wir einen gleichmässigen Ablauf der Erscheinungen voraussetzen. Der Thatsache, dass wir den Verlauf der elementaren Einzelprozesse als einen gleichmässigen betrachten, sind wir uns freilich nicht immer bewusst; wir operieren mit dieser Vorstellungsweise so geläufig, dass wir nicht nötig haben, uns ihren eigentlichen Charakter jederzeit erst klar zu machen; aber wir wollen doch ausdrücklich betonen, dass diese Voraussetzung unserer gesamten naturwissenschaftlichen Denkweise zu Grunde liegt. An dieser Stelle mag es genügen, hiefür auf ein einzelnes Beispiel hinzuweisen. Bewegt sich ein Körper gleichmässig, so verstehen wir unter Geschwindigkeit den in einer Sekunde zurückgelegten Weg. Bewegt sich der Körper aber mit wechselnder Geschwindigkeit, so verfahren wir, um uns von seiner Geschwindigkeit in irgend einem Augenblick ein Bild zu machen, so, dass wir annehmen, der Körper bewege sich in dem bezüglichen Moment eine kleine Zeit τ hindurch gleichmässig; das Verhältnis zwischen der kurzen Wegstrecke σ, die er in dieser Zeit zurücklegt, und der Zeit τ giebt uns dann die Geschwindigkeit, die ihm für diese Strecke zukommt. Dieses Verfahren beruht auf einer inneren Notwendigkeit. Wie eben erwähnt, ist der Begriff der Geschwindigkeit nur für gleichmässige Bewegungen vorstellbar; wollen wir ihn daher anwenden, so können wir es nur so, dass wir mit lauter gleichmässigen Bewegungen operieren, und dementsprechend die wirkliche Bewegung in lauter kurze Bewegungen gleichmässiger Natur auflösen. Wir pflegen demgemäss auch die momentane Geschwindigkeit einer veränderlichen Bewegung als diejenige Geschwindigkeit zu definieren, mit der sich der bewegliche Körper weiter bewegen würde, wenn er sich von dem betrachteten Augenblick an gleichmässig bewegte.

Die so skizzierte Methode der Naturbetrachtung hat daher nur den Charakter einer Annäherungsmethode. Je kleiner wir die einzelnen Intervalle annehmen, um so grösser wird die Annäherung; wenn wir sie uns so klein vorstellen, dass sie sinnlich nicht mehr erreichbar sind, so ist unser Intellekt dabei im wesentlichen befriedigt. Sie bleibt aber trotzdem doch nur ein Notbehelf; ein Verfahren, dessen wir nicht entraten können, weil es uns nicht möglich ist, Prozesse direct zu

erfassen und zu zergliedern, die in dem Augenblick, da wir sie erfassen wollen, schon wieder eine andere Gestalt angenommen haben. Dieser Methode ist die mathematische Behandlungsart der Naturvorgänge genau nachgebildet; aber doch besteht, wie die folgenden Entwicklungen offenbaren werden, zwischen ihr und der gewöhnlichen ein prinzipieller Unterschied. Die Rechnung vermag, was dem Intellekt nicht möglich ist; sie vermag die Gesetze, welche die unaufhörlich veränderlichen Prozesse und Erscheinungen betreffen, direkt zu erfassen. Hierin liegt ihre Berechtigung, ja ihre Notwendigkeit. Im Ausgangspunkt bieten daher die Methoden der höheren Mathematik nichts Neues. Neu an ihnen, und auf keine andere Weise erreichbar, ist ganz etwas anderes, nämlich das Ergebnis, dass diese Methoden nicht blos den Charakter eines Annäherungsverfahrens besitzen, sondern dass ihre mathematische Vervollkommnung die exakten Gesetze des Naturgeschehens liefert.

§ 2. Bewegung auf der Parabel.

Um die Wahrheit der vorstehenden Erörterungen zu veranschaulichen, behandeln wir die nachfolgenden Aufgaben.

Ein Punkt bewege sich auf einer Parabel; man soll in jedem Augenblick die Bewegungsrichtung berechnen.

Die Bewegungsrichtung ändert sich in jedem Augenblick der Bewegung, wir wissen aber, dass wir sie an jeder Stelle der Bahn durch die Richtung der Parabeltangente darzustellen haben.

Liegt die Parabel gezeichnet vor, so können wir die Tangentenrichtung in einem einzelnen Punkt durch Messung bestimmen; die hier gestellte Aufgabe verlangt aber, sie rechnerisch durch eine für alle Punkte giltige Formel auszudrücken.

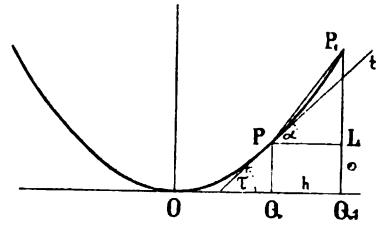


Fig. 29.

Wir beziehen zu diesem Zweck (Fig. 29) die Parabel auf ein Koordinatensystem; wir nehmen aber hier zweckmässig die y-Axe als die Symmetrieaxe an. Ihre Gleichung erhalten wir dann, indem wir in der S. 10 abgeleiteten Gleichung x und y vertauschen, in der Form

$$1) \quad x^2 = 2py \text{ oder } y = \frac{x^2}{2p}.$$

Der Punkt P, für den die Lage der Tangente zu berechnen ist, habe

die Koordinaten xy. Die Tangente in P sei t und der Winkel, den sie mit der x-Axe bildet, sei τ. Diesen Winkel haben wir zu bestimmen.

In angenäherter Form können wir die Rechnung leicht in der Weise ausführen, dass wir in bekannter Weise die Parabel durch ein Polygon von vielen kleinen Seiten ersetzen, und die Richtung der durch P gehenden Seite PP_1 bestimmen. Hat P_1 die Koordinaten $x_1 y_1$, und ist α der Winkel, den die Seite PP_1 mit der x-Axe einschliesst, so folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck PP_1L

$$2) \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{P_1L}{PL} = \frac{P_1Q_1 - LQ_1}{QQ_1} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}.$$

Da P und P_1 Parabelpunkte sind, so bestehen für sie die Gleichungen

$$y = \frac{x^2}{2p} \text{ und } y_1 = \frac{x_1^2}{2p},$$

aus ihnen folgt durch Subtraktion

$$y_1 - y = \frac{x_1^2 - x^2}{2p},$$

und wenn wir diesen Wert in die Gleichung 2) einsetzen, so ergiebt sich

$$3) \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2p} \frac{x_1^2 - x^2}{x_1 - x}.$$

Bezeichnen wir noch die Strecke QQ_1 mit h, setzen wir also

$$4) \quad x_1 - x = h, \text{ d. h. } x_1 = x + h,$$

so verwandelt sich Gleichung 3) in

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2p} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \frac{1}{2p} \frac{2hx + h^2}{h} = \frac{1}{2p}(2x + h)$$

oder endlich

$$5) \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{p} + \frac{h}{2p}.$$

Damit haben wir die Richtung der Seite PP_1 bestimmt, angenähert also auch die Richtung der Tangente. Der Fehler, den wir begehen, hängt davon ab, wie nahe der Punkt P_1 bei P liegt, d. h. von der Grösse h. Augenscheinlich können wir die Seiten des Polygons, durch das wir die Parabel ersetzen, so klein annehmen, dass für unser Auge ein Unterschied zwischen dem Bild des Polygons und der Parabel nicht mehr existiert, also auch ein Unterschied zwischen Parabeltangente und Polygonseite für uns und unsere Messinstrumente nicht mehr wahrnehmbar ist.

Wenn aber ein Fehler so gering ist, dass wir ihn weder sehen noch messen können, so ist er für unser praktisches Bedürfnis überhaupt nicht vorhanden; von diesem Standpunkt aus haben wir daher die gestellte Aufgabe mit ausreichender Genauigkeit erledigt.

Mittelst einer einfachen Betrachtung können wir die vorstehende Methode so ausnützen, dass sie uns den absolut genauen Wert des Tangentenwinkels liefert. Diese Betrachtung knüpft daran an, dass die rechte Seite der Gleichung 5) aus zwei Summanden besteht, von denen der erste die Grösse h gar nicht enthält. Wenn wir nun für h der Reihe nach Werte setzen, wie es uns beliebt, z. B. $0{,}1^{mm}$, $0{,}02^{mm}$ u. s. w., so bleibt der erste Summand ganz unverändert, es ändert sich nur der zweite, der das Mass der Annäherung bildet. Setzen wir für h immer kleinere Zahlen, z. B. $0{,}0000001^{mm}$, so wird das Polygon der Parabel immer näher kommen, es wird der zweite Summand und damit der Fehler immer geringer. Begrifflich haben wir aber zwischen Polygon und Parabel immer noch zu unterscheiden, und dies bleibt bestehen, wie klein auch h werden mag. Der Uebergang des Polygons in die Parabel würde erst dann eintreten, wenn die Grösse h den Wert Null erreicht. Diesen Uebergang können wir zwar begrifflich nicht mitmachen, denn das Bild eines Polygons, in dem alle Seiten die Länge Null haben, ist keine klare und präzise Vorstellung mehr; unsere Formel aber leistet ihn, wir haben in ihr nur $h = 0$ zu setzen. Wir erhalten dann als wirklichen Wert des Tangentenwinkels

$$6) \quad \operatorname{tg} \tau = \frac{x}{p}$$

und diese Gleichung stellt uns die Richtung der Parabeltangente für den Parabelpunkt P, und da der Punkt P ein beliebiger Punkt war, für jeden Parabelpunkt mit vollkommener Genauigkeit dar.

§ 3. Der freie Fall.

Man soll für einen frei fallenden Körper in jedem Augenblick die Geschwindigkeit bestimmen.

Wenn ein Körper von der Ruhelage aus in gerader Richtung zur Erde fällt, so betragen die nach 1, 2, 3, 4 .... Sekunden zurückgelegten Wege bekanntlich $\frac{g}{2}$, $4\frac{g}{2}$, $9\frac{g}{2}$, $16\frac{g}{2}$ .... Meter und allgemein wird daher der nach t Sekunden durchlaufene Weg von s Metern durch die Formel

$$1) \quad s = \tfrac{1}{2} g t^2$$

gegeben.

Die Geschwindigkeit der Bewegung ist in jedem Augenblick, resp. an jeder Stelle der Bahn eine andere, denn die in den einzelnen Sekunden durchmessenen Wege haben die Länge $\frac{g}{2}$, $3\frac{g}{2}$, $5\frac{g}{2}$ .... und nehmen daher mit der Zeit ununterbrochen zu. Andrerseits ist, wie wir bereits oben erwähnten, der Geschwindigkeitsbegriff rechnerisch nur für Körper definiert, die in gleichen Zeiten gleiche Wege zurücklegen, und zwar als Länge des in der Zeiteinheit durchlaufenen Weges. Wir stehen also wieder vor der Schwierigkeit, dass die Begriffe, mit denen wir operieren sollen, auf den Vorgang, den die Anschauung darbietet, nicht unmittelbar anwendbar sind, und müssen daher zunächst wieder zu einem Annäherungsverfahren unsere Zuflucht nehmen.

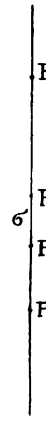


Fig. 30.

Um die Vorstellung zu vereinfachen, ersetzen wir den fallenden Körper durch einen schweren Punkt, z. B. seinen Schwerpunkt. P_0 sei (Fig. 30) der Ausgangspunkt der Bewegung; nach t, t_1, t_2 .... Sekunden möge der fallende Punkt die Stellen P, P_1, P_2 .... passieren und es seien s, s_1, s_2 .... die durchlaufenen Wege P_0P, P_0P_1, P_0P_2 .... Es bestehen dann nach 1) die Gleichungen

$$2) \quad s = \tfrac{1}{2}gt^2, \; s_1 = \tfrac{1}{2}gt_1^2, \; s_2 = \tfrac{1}{2}gt_2^2 \ldots .$$

Jetzt denken wir uns einen Hilfspunkt, der sich ebenfalls von P_0 aus in vertikaler Richtung bewegt, und die Stellen P, P_1, P_2, P_3.... in denselben Augenblicken passiert, wie der fallende Punkt selbst, aber jede der Strecken PP_1, P_1P_2, P_2P_3 .... mit gleichmässiger Geschwindigkeit durchläuft. Längs dieser Strecken haben beide Punkte verschiedene Bewegung; wir werden beide Punkte innerhalb der Strecken in jedem Augenblick an verschiedenen Stellen sehen, während sie die Stellen P, P_1, P_2 .... zugleich passieren.

Es sei σ die Länge der Strecke PP_1 und τ die Zeit, in der der Hilfspunkt diese Strecke durchläuft, so beträgt seine Geschwindigkeit V auf dieser Strecke

$$3) \quad V = \frac{\sigma}{\tau}.$$

Nun ist aber

$$\sigma = PP_1 = P_0P_1 - P_0P = s_1 - s$$

und da die Stellen P und P_1 nach t resp. t_1 Sekunden passiert werden, so ist

$$\tau = t_1 - t,$$

also folgt

$$4) \quad V = \frac{\sigma}{\tau} = \frac{s_1 - s}{t_1 - t}.$$

Nun bestehen für die zusammengehörigen Werte $s\ t$ resp. $s_1\ t_1$ die Gleichungen 2); aus ihnen folgt

$$s_1 - s = \tfrac{1}{2} g\,(t_1^2 - t^2).$$

Setzen wir diesen Wert von $s_1 - s$ in Gleichung 4) ein, so ergiebt sich

$$V = \tfrac{1}{2} g\,\frac{t_1^2 - t^2}{t_1 - t}.$$

Beachten wir noch, dass $t_1 - t = \tau$ und $t_1 = t + \tau$ ist, so erhalten wir

$$V = \tfrac{1}{2} g\,\frac{(t+\tau)^2 - t^2}{\tau} = \tfrac{1}{2} g\,\frac{2t\tau + \tau^2}{\tau}$$

oder endlich

$$5) \quad V = \tfrac{1}{2} g\,(2t + \tau) = gt + \tfrac{g}{2}\tau.$$

Dies ist Geschwindigkeit des Hilfspunktes auf der ganzen Strecke PP_1.

Die Bewegung des Hilfspunktes können wir der Bewegung des frei fallenden Punktes beliebig annähern. Das Mass der Annäherung hängt von der Kleinheit der Strecken $PP_1, P_1P_2 \ldots$. ab; es ist klar, dass wir diese Strecken so winzig annehmen können, dass wir auch mit scharfen Instrumenten beide Punkte nicht mehr gesondert wahrnehmen. Für das praktische Bedürfnis können wir daher wieder die Bewegung des freien Falls durch die Bewegung des Hilfspunktes ersetzen, und den durch Gleichung 5) gegebenen Wert von V als die Geschwindigkeit des frei fallenden Punktes an der Stelle P ansehen, vorausgesetzt, dass wir für τ eine hinreichend kleine Zeit annehmen.

Auch hier führt uns aber unsere Formel zu dem genauen Wert der gesuchten Geschwindigkeit. Je kleiner wir den Wert von τ nehmen, desto grösser wird die Annäherung; die vollkommene Verschmelzung der Bewegung des Hilfspunktes mit der des freien Falls tritt aber wiederum erst dann ein, wenn wir τ den Wert Null erreichen lassen. Diese Verschmelzung können wir uns in ihrem letzten Verlauf ebensowenig begrifflich vorstellen, wie den Uebergang eines Polygons in eine Parabel; unsere Formel aber leistet dies wieder; setzen wir in ihr $\tau = 0$, so giebt sie den genauen Wert der Geschwindigkeit v zur Zeit t. Wir erhalten

$$6) \quad v = gt$$

und diese Gleichung bestimmt, da P ein beliebiger Punkt war, die Geschwindigkeit des frei fallenden Punktes in jedem Zeitpunkt der Bewegung.

§ 4. Die Wärmeausdehnung eines Stabes.

Nach einer bekannten Formel dehnt sich ein Massstab von der Länge eines Meters durch Erwärmung in der Weise aus, dass seine Länge l für jede Temperatur ϑ durch die Formel*)

$$1) \quad l = 1 + b\vartheta + c\vartheta^2$$

dargestellt werden kann, in der a, b, c konstante Zahlen bedeuten, die von der Natur des Stabes abhängen und durch Beobachtung gefunden werden können. Im besondern folgt aus der Formel, dass der Stab bei der Temperatur Null die Länge 1 hat, also bei dieser Temperatur seine richtige Länge besitzt. Man soll angeben, in welchem Grade die Ausdehnung in jedem Moment der Erwärmung vor sich geht.

Um hier präzise Begriffe einzuführen, erinnern wir zunächst daran, dass man, wenn die Ausdehnung gleichmässig erfolgt, die Längenzunahme, die bei Erwärmung um einen Grad eintritt, als Mass der Ausdehnung benützt. Man bezeichnet sie als den Ausdehnungskoeffizienten. In dem hier vorliegenden Fall ist, wie sich zeigen wird, der Ausdehnungskoeffizient für jede Phase der Erwärmung ein anderer; ihn gerade haben wir zu ermitteln. Sind ϑ, ϑ_1, ϑ_2 . . . irgend welche Temperaturen, und sind l, l_1, l_2 . . . die entsprechenden Längen des Stabes, so benutzen wir zunächst wieder die Hilfsvorstellung, dass die Ausdehnung bei Erwärmung von ϑ auf ϑ_1, von ϑ_1 auf ϑ_2 . . . gleichmässig erfolgt. Bei der Erwärmung von ϑ auf ϑ_1 tritt alsdann eine gleichmässig verlaufende Längenzunahme von l auf l_1 ein; einer Erwärmung um 1^0 entspricht daher die Ausdehnung

$$2) \quad A = \frac{l_1 - l}{\vartheta_1 - \vartheta}.$$

Nun ist nach 1)

$$l_1 = 1 + b\vartheta_1 + c\vartheta_1^2,$$
$$l = 1 + b\vartheta + c\vartheta^2,$$

daher ist

$$l_1 - l = b(\vartheta_1 - \vartheta) + c(\vartheta_1^2 - \vartheta^2).$$

Setzen wir noch

$$3) \quad l_1 - l = \lambda, \quad \vartheta_1 - \vartheta = \Theta,$$

sodass λ die Längenzunahme darstellt, die der Erwärmung um Θ entspricht, und beachten, dass

$$\vartheta_1^2 - \vartheta^2 = (\vartheta_1 + \vartheta)(\vartheta_1 - \vartheta) = \Theta(\vartheta_1 + \vartheta)$$

ist, so folgt

$$A = \frac{\lambda}{\Theta} = \frac{b\Theta + c\Theta(\vartheta_1 + \vartheta)}{\Theta}$$

*) Vgl. z. B. Mousson, Physik, Band II, S. 23, (3. Auflage).

oder endlich, indem wir noch ϑ_1 durch $\vartheta + \Theta$ ersetzen,

$$4) \quad A = b + c(2\vartheta + \Theta) = b + 2c\vartheta + c\Theta.$$

Dies ist der Ausdehnungskoeffizient für die Erwärmung von ϑ auf ϑ_1, vorausgesetzt, dass die Ausdehnung gleichmässig stattfindet.

Je kleiner wir Θ, d. h. die Differenz von ϑ_1 und ϑ annehmen, um so näher kommt unsere Hilfsvorstellung wiederum dem Verlauf des Ausdehnungsprozesses, wie er im Augenblick, wo die Temperatur ϑ^0 beträgt, wirklich vor sich geht. Eine volle Uebereinstimmung erhalten wir aber erst wieder, wenn wir den kleinen, gleichmässigen Ausdehnungsprozessen die Dauer Null beilegen; und wenn das auch intellektuell wiederum formal unmöglich ist, so giebt doch die Formel auch hier sofort das exakte Resultat. Wir setzen $\Theta = 0$ und erhalten für den gesuchten Ausdehnungskoeffizienten α in demjenigen Moment, in dem die Temperatur den Wert ϑ hat,

$$5) \quad \alpha = b + 2c\vartheta$$

und da der Wert von ϑ beliebig ist, so gilt diese Formel für den gesamten Verlauf der Erwärmung.

Es ist nützlich, zu bemerken, dass man den Ausdehnungskoeffizienten auch als Geschwindigkeit definieren kann. Er ist ein Mass für die Schnelligkeit, mit der die Längenzunahme bei gleichmässiger Erwärmung vor sich geht; von der Schnelligkeit eines Prozesses haben wir ja eine ebenso genaue Vorstellung, wie von der Schnelligkeit einer Bewegung. Die Längenzunahme, die bei gleichmässigem Verlaufe der Erwärmung pro Grad auftritt, entspricht genau der Wegzunahme eines bewegten Körpers pro Sekunde; und so kann man also auch die Grösse α als die momentane Ausdehnungsgeschwindigkeit bezeichnen, mit der bei der Temperatur ϑ die Ausdehnung stattfindet.

§ 5. Der Differentialquotient.

Wir haben im Anschluss an das Vorstehende einige Bezeichnungen einzuführen. Die Bestimmung der Tangente der Parabel knüpfte sich an die Gleichung

$$1) \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{x}{p} + \frac{h}{2p}$$

und zwar erhielten wir aus ihr den Wert von $\operatorname{tg}\tau$, indem wir $h = 0$ setzten; es ergab sich

$$2) \quad \operatorname{tg}\tau = \frac{x}{p}.$$

Dies entsprach dem Umstande, dass wir das Polygon durch Verkleinerung der Seiten in die Parabel übergehen liessen. Man nennt in

dieser Hinsicht die Parabel die Grenze des Polygons, ebenso wie man den Kreis bei der Berechnung der Peripherie als Grenze der ihm eingeschriebenen regelmässigen Polygone ansieht. Mit Rücksicht hierauf bezeichnet man den obigen Wert von $\operatorname{tg}\tau$ als einen Grenzwert, resp. genauer als den Grenzwert für $h=0$; man stellt sich vor, dass es der letzte aller Werte ist, den die Ausdrücke der Gleichung 1) annehmen, wenn man h kleiner und kleiner werden lässt. Wir wollen die Differenz der Abscissen, die bisher h genannt wurde, jetzt durch Δx, diejenige der Ordinaten durch Δy bezeichnen, d. h. wir setzen

$$3)\quad x_1 - x = \Delta x,\quad y_1 - y = \Delta y,$$

so dass

$$x_1 = x + \Delta x,\quad y_1 = y + \Delta y$$

ist, also Δx und Δy den Zuwachs bedeuten, den x und y erleiden, wenn wir vom Punkte P zum Punkte P_1 übergehen. Wir erhalten somit

$$4)\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

und der Grenzwert dieses Quotienten ist es, der den Wert von $\operatorname{tg}\tau$ giebt. Mit Rücksicht darauf, dass er aus einem Differenzenquotienten entsteht, hat man ihn Differentialquotient oder genauer Differentialquotient von y nach x genannt und bezeichnet ihn durch $\frac{dy}{dx}$. Es besteht also für die Parabel die Gleichung

$$5)\quad \operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{p}.$$

Das analoge gilt für die Bewegung des freien Falls. Dort waren wir von der Gleichung

$$6)\quad V = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = gt + \frac{g}{2}\tau$$

ausgegangen; ihr Wert für $\tau = 0$, oder nach obiger Bezeichnung ihr Grenzwert für $\tau = 0$ ist derjenige, der die Geschwindigkeit v des freien Falls giebt, und zwar

$$7)\quad v = gt.$$

Wir setzen auch hier

$$8)\quad t_1 - t = \Delta t,\quad s_1 - s = \Delta s,$$

resp.

$$t_1 = t + \Delta t,\quad s_1 = s + \Delta s,$$

sodass Δs den Zuwachs bedeutet, den der Weg s erfährt, wenn die Zeit um Δt wächst; alsdann ist es der Grenzwert des Quotienten

$$9)\quad V = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

der den Wert von v liefert. Wir bezeichnen ihn wieder als Differentialquotient, oder genauer als Differentialquotient von s nach t und schreiben dafür $\frac{ds}{dt}$, so dass für die Fallbewegung die Gleichung besteht

$$10) \quad v = \frac{ds}{dt} = gt.$$

Endlich ist, was das letzte behandelte Beispiel betrifft, folgendes zu bemerken. Wir waren von der Gleichung

$$11) \quad A = \frac{l_1 - l}{\vartheta_1 - \vartheta} = b + 2c\vartheta + c\Theta$$

ausgegangen und hatten gefunden, dass der Grenzwert des Quotienten für $\Theta = 0$ wiederum derjenige Ausdruck ist, der den momentanen Ausdehnungskoeffizienten, resp. die momentane Ausdehnungsgeschwindigkeit liefert, nämlich

$$12) \quad \alpha = b + 2c\vartheta.$$

Wir setzen auch hier

$$13) \quad l_1 - l = \Delta l, \quad \vartheta_1 - \vartheta = \Delta\vartheta,$$

sodass Δl die Längenzunahme bedeutet, die der Temperaturzunahme $\Delta\vartheta$ entspricht, sodass

$$14) \quad A = \frac{\Delta l}{\Delta\vartheta}$$

ist. Den Grenzwert dieses Quotienten bezeichnen wir wieder durch $\frac{dl}{d\vartheta}$; er liefert den Wert von α, sodass hier die Gleichung

$$15) \quad \alpha = \frac{dl}{d\vartheta} = b + 2c\vartheta$$

besteht.

§ 6. Die physikalische Bedeutung des Differentialquotienten.

Die vorstehenden Beispiele lassen hinreichend erkennen, wie mannigfache Probleme auf die Differentialquotienten führen; ja sie berechtigen uns zu dem Ausspruch, dass der Naturforscher, auch wenn er der Begriffe unkundig ist, häufig unbewusst mit Differentialquotienten operiert. Um einige der zahlreichen Beispiele zu geben, die wir später behandeln, so bedeutet, ebenso wie der Differentialquotient eines Weges nach der Zeit die Geschwindigkeit darstellt, mit welcher der betreffende Weg zurückgelegt wird, derjenige der Quantität eines chemisch sich umsetzenden Stoffes nach der Zeit entsprechend die Reaktionsgeschwindigkeit. Betrachten wir die Beziehung des Volumens einer Flüssigkeit oder der Länge eines Stabes oder der elektromotorischen

Kraft eines galvanischen Elementes zur Temperatur, so liefert der Differentialquotient jener Grössen nach der Temperatur den Temperaturkoeffizienten. Der Temperaturkoeffizient des Wärmeinhaltes eines festen Körpers ist besonders wichtig, er bedeutet ja nichts anderes als die spezifische Wärme der betreffenden Substanz.

Setzen wir ein magnetisches Metall der Wirkung des Magnetismus oder, präziser ausgedrückt, der Einwirkung eines magnetischen Feldes aus, so wird das Metall selber magnetisch, d. h. es erhält ein gewisses magnetisches Moment. Der Differentialquotient dieses Momentes nach der Intensität des Feldes heisst die Magnetisierungsfähigkeit des betreffenden Metalles, die für sein magnetisches Verhalten charakteristisch ist.

Betrachten wir das Volumen einer Flüssigkeit in seiner Abhängigkeit vom äusseren Druck, so liefert der negativ genommene Differentialquotient des Volumens nach dem Druck den Kompressionskoeffizienten — negativ genommen aus dem Grunde, weil mit zunehmendem äusseren Druck das Volumen abnimmt und der Kompressionskoeffizient ja offenbar um so grösser ist, je stärker das Volumen sich bei einer Vermehrung des äusseren Druckes verkleinert.

§ 7. Der Funktionsbegriff.

Wenn wir den Druck, unter dem ein Gas steht, ändern, so ändert sich auch das Volumen des Gases; es dehnt sich aus oder zieht sich zusammen, je nachdem wir den Druck verringern oder steigern. Die relative Aenderung von Druck und Volumen geht gesetzmässig vor sich, das Gesetz, in dem sie ihren Ausdruck findet, ist das Boyle-Mariotte'sche. Die Beziehung zwischen Druck und Volumen fällt unter denjenigen Begriff, den man mathematisch als Funktionsbegriff bezeichnet hat; man sagt daher, dass das Volumen v eine Funktion des Druckes p ist. In gleicher Weise giebt das Fallgesetz einen gesetzmässigen Ausdruck für den nach t Sekunden durchmessenen Weg s; man nennt daher auch s eine Funktion von t, und das gleiche gilt für alle Naturvorgänge, in denen Mass- und Zahlgrössen auftreten, die ihren Wert nach festen Gesetzen mit einander ändern.

Ist v_0 und p_0 der Wert von Volumen und Druck im ursprünglichen Zustand, so lässt sich (S. 1) das Boyle-Mariotte'sche Gesetz durch die Formel

$$1) \quad vp = v_0 p_0, \text{ resp. } v = \frac{v_0 p_0}{p}$$

darstellen; für das Fallgesetz haben wir die Gleichung

$$2) \quad s = \tfrac{1}{2} g t^2.$$

Diese Gleichungen gestatten, zu jedem Wert von p den zugehörigen Wert von v und für jeden Wert von t den zugehörigen Wert s zu berechnen, und dem entsprechend haben wir v als Funktion von p und s als Funktion von t bezeichnet. Wir brauchen aber die obigen Gleichungen nur in die Form

$$3) \quad p = \frac{p_0 v_0}{v} \text{ und } t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

zu setzen, um zu erkennen, dass wir — zunächst in rein formalem Sinn — auch den Druck p als Funktion des Volumens v und t als Funktion von s auffassen können. Denn mittelst dieser Gleichungen können wir ganz analog zu einem gegebenen Wert von v den zugehörigen Wert von p berechnen, ebenso für jeden Wert von s die Zeit t bestimmen, in der der fallende Körper die Strecke s zurückgelegt hat. Der innere Grund ist der, dass wenn wir bei einem Naturvorgang die gleichzeitigen Wertänderungen irgend zweier Grössen betrachten, von einer objektiven Bevorzugung der einen Grösse keine Rede sein kann; welche von ihnen wir als Funktion der andern betrachten, ist eine Frage, die nur von unserem subjektiven Ermessen abhängig ist. Dass hierfür vielfach gewisse »natürliche« Gesichtspunkte massgebend sein können, werden wir sofort erkennen.

Die Grössen v und p, resp. s und t, die sich während des Naturvorganges fortwährend ändern, bezeichnet man als variabele oder veränderliche Grössen; sie stehen im Gegensatz zu denen, die wie die Schwere g einen festen Wert haben und daher konstante Grössen heissen. Betrachtet man v als Funktion von p, oder s als Funktion von t, so nennt man p, resp. t die unabhängige Variabele, v und s die abhängige. Bei den Naturvorgängen, die in der Zeit verlaufen, pflegt man gewöhnlich die Zeit t als die unabhängige Variabele aufzufassen, dem Gefühl entsprechend, dass die Zeit in stets gleichförmiger, von uns unabhängiger Weise abläuft, und somit die »natürliche« unabhängige Veränderliche darstellt. Nichts hindert aber, wie dies in der obigen Gleichung bereits geschehen, für die Rechnung t als die abhängige Variabele zu wählen; wir können ja auch die Frage stellen, die Zeit t zu bestimmen, in der der fallende Punkt eine gegebene Strecke zurückgelegt hat.

Wir können uns das vorstehende am einfachsten veranschaulichen, wenn wir die Lehren der analytischen Geometrie zu Rate ziehen. In

jeder Gleichung zwischen den Koordinaten x und y, die eine Kurve darstellt, sind nämlich x und y veränderliche Grössen genau in dem hier definierten Sinn; sie können unendlich viele zusammengehörige Werte annehmen und ändern sich gesetzmässig mit einander, nämlich nach einem Gesetz, das in der bezüglichen Kurve seinen Ausdruck findet. Fasst man x als die unabhängige Variable auf, so ist y die abhängige; mittelst der gegebenen Gleichung kann man zu jedem Wert von x das zugehörige y bestimmen und es ist y eine Funktion von x. Mit Hilfe derselben Gleichung kann man aber auch umgekehrt zu jedem beliebigen Wert von y das zugehörige x berechnen, d. h. man kann auch x als Funktion von y ansehen, oder y als unabhängige, x als die abhängige Variable betrachten.

Die einfachsten Funktionen, wie die Potenz, der Logarithmus, die trigonometrischen Funktionen, d. h.

$$x^n,\ \log x,\ \sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x,$$

sind uns bereits aus der Elementarmathematik bekannt, durch Kombination von ihnen können wir eine grosse Zahl neuer Funktionen bilden, wie z. B.

$$\frac{a}{x},\ \sqrt{1+x^2},\ \lg\frac{a-x}{a+x},\ \sin x+\cos x \text{ u. s. w.},$$

es sind zugleich diejenigen, die in den einfacheren naturwissenschaftlichen Anwendungen vorwiegend, ja fast ausschliesslich auftreten.

Um eine Funktion von x zu bezeichnen, hat man die Zeichen

$$f(x),\ \varphi(x),\ F(x) \ldots\ldots$$

eingeführt; die Gleichungen

$$4)\quad y=f(x),\ s=\varphi(t) \ldots$$

drücken also aus, dass y irgend eine Funktion von x, s irgend eine Funktion von t ist ..... Sind alsdann $x_1, y_1,\ x_2 y_2,\ x_3 y_3$ .. zusammengehörige Werte von x und y, so wird dies durch die Gleichungen

$$5)\quad y_1=f(x_1),\ y_2=f(x_2),\ y_3=f(x_3) \ldots$$

dargestellt, wie uns dies aus der analytischen Geometrie geläufig ist.

§ 8. Allgemeine Vorschrift für die Bildung der Differentialquotienten.

Um die Betrachtungen von § 2—4 auf beliebige Funktionen zu übertragen, d. h. um zu ihren Differentialquotienten zu gelangen, knüpfen

wir zweckmässig an die graphische Darstellung der Funktionen an. Es sei

$$1) \quad y = f(x)$$

irgend eine Funktion von x. Durch eine Gleichung zwischen x und y wird nach S. 6 eine Kurve dargestellt, also auch durch die Gleichung 1); die nebenstehende geometrische Kurve (Fig. 31) sei diejenige, welche der Gleichung 1) entspricht. Wir können uns wieder die Aufgabe stellen, die Tangente dieser Kurve in irgend einem ihrer Punkte zu bestimmen.

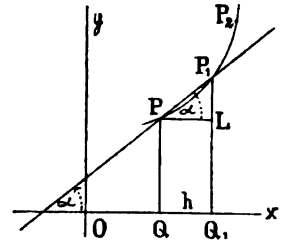


Fig. 31.

Wir wollen diese Aufgabe nach demselben Verfahren angreifen, das wir oben in § 2 benutzt haben. Wir denken uns also wiederum ein Polygon, dessen Punkte P, P_1, P_2 . . . auf der Kurve liegen, so können wir auch hier den Winkel α, den die Polygonseite PP_1 mit der x-Axe einschliesst, ohne weiteres bestimmen. Wir erhalten

$$1) \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{P_1L}{PL} = \frac{P_1Q_1 - PQ}{OQ_1 - OQ} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

oder, da $y = f(x)$ und $y_1 = f(x_1)$ ist,

$$2) \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Diesen Quotienten formen wir ebenso um, wie den in § 2 betrachteten, nämlich so, dass er nur x und h enthält, nur dass wir die Rechnung hier nicht ausführen, sondern nur andeuten können. Setzen wir also

$$x_1 - x = h, \quad x_1 = x + h,$$

so finden wir

$$3) \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Den Wert des Winkels τ, den die Tangente in P mit der x-Axe bildet, erhalten wir erst wieder für $h = 0$, d. h. wenn wir in dem Ausdruck, den wir bei der Ausrechnung des Quotienten auf der rechten Seite erhalten, zuletzt h durch Null ersetzen. Diesen Wert können wir für eine beliebige Funktion nicht wirklich ausrechnen, sondern nur formal andeuten; wir bezeichnen ihn durch

$$4) \quad \operatorname*{limes}_{h=0}\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] \text{ oder } \lim_{h=0}\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right].$$

Zum Verständnis dieser Bezeichnung ist folgendes zu bemerken. Wir haben bereits in § 2 erwähnt, dass man diesen Wert als einen

letzten in der Reihe aller derjenigen ansieht, die der bezügliche Quotient erhält, wenn h immer kleiner wird, oder, wie man sich gewöhnlich ausdrückt, gegen Null konvergiert, und dass man ihn von diesem Gesichtspunkt aus als einen Grenzwert bezeichnet. Dem wird durch das Wort limes (= Grenze) oder kurz durch lim Ausdruck gegeben.

Für die durch die Gleichung 1) dargestellte Kurve wird daher die Richtung τ der Tangente in jedem ihrer Punkte durch die Gleichung

$$5) \quad \operatorname{tg}\tau = \lim_{h=0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

gegeben.

Wir haben noch diejenigen Bezeichnungen allgemein einzuführen, die denen des § 5 analog sind. Wir waren ausgegangen von dem Quotienten

$$6) \quad \frac{y_1-y}{x_1-x} = \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

in dem xy und x_1y_1 die Koordinaten von zwei benachbarten Kurvenpunkten P und P_1 waren. Die Differenz der Abscissen wollen wir nun wieder durch Δx, diejenige der Ordinaten durch Δy bezeichnen, d. h. wir setzen

$$7) \quad x_1 - x = \Delta x, \quad y_1 - y = \Delta y$$

und fügen dazu noch die analoge Bezeichnung

$$7\,a) \quad f(x_1) - f(x) = \Delta f(x),$$

sodass das Zeichen Δ immer die Differenz von zwei benachbarten Werten bedeutet.

Auf Grund dieser Bezeichnung erhalten wir

$$8) \quad \frac{y_1-y}{x_1-x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

und dies ist der Quotient, dessen Grenzwert für $h=0$, resp. nach jetziger Bezeichnung für $\Delta x = 0$ in Frage steht. Der Quotient stellt das Verhältnis zwischen dem Zuwachs der Funktion und dem Zuwachs der unabhängigen Variabeln dar; er giebt also ein Mass für die grössere oder geringere Schnelligkeit, mit der die Funktion wächst oder abnimmt; gerade hierauf beruht die mannigfache naturwissenschaftliche Bedeutung, die ihm zukommt. Den Grenzwert dieses Quotienten nennt man nun allgemein mit Rücksicht darauf, dass er aus einem Differenzenquotienten entspringt, Differentialquotient oder genauer Differentialquotient von y nach x, resp. von $f(x)$ nach x und bezeichnet ihn durch

$$\frac{dy}{dx}, \text{ resp. } \frac{df(x)}{dx}.$$

Wir haben also die definierende Gleichung

$$9) \quad \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h=0} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

Durch diese Gleichung ist zugleich ein allgemeines Schema, resp. eine allgemeine Vorschrift gegeben, nach der wir für jede Funktion den Differentialquotienten zu bilden haben. Seine Ermittelung für die einzelnen einfachen Funktionen ist eine der ersten rechnerischen Aufgaben, die wir lösen wollen.

Als allgemeines Ergebnis der vorstehenden Betrachtungen führen wir noch an, dass für jede Kurve, deren Gleichung in der Form

$$y = f(x)$$

gegeben ist, die Lage der Tangente in jedem Punkt durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$$

bestimmt ist.

Drittes Kapitel.

Differentiation der einfachen Funktionen.

§ 1. Der binomische Lehrsatz.

Um den Differentialquotienten der Potenz x^n zu bilden, bedürfen wir des binomischen Lehrsatzes. Er stellt die Verallgemeinerung der bekannten Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

u. s. w.

dar und lautet

1) $(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \frac{n}{1}ab^{n-1} + b^n.$

Dieser Satz lässt sich folgendermassen beweisen. Nehmen wir zunächst an, dass n den bestimmten Wert 4 hat, so dass es sich um die Formel

$$2) \quad (a+b)^4 = a^4 + \frac{4}{1}a^3b + \frac{4.3}{1.2}a^2b^2 + \frac{4}{1}ab^3 + b^4$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

handelt. Es ist

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b).$$

Die rechte Seite ergiebt, wenn wir ausmultiplizieren, lauter Glieder von je vier Faktoren a oder b; diese sind

$aaaa$	$aaab$	$aabb$	$abbb$	$bbbb$
	$aaba$	$abab$	$babb$	
	$abaa$	$abba$	$bbab$	
	$baaa$	$baab$	$bbba$	
		$baba$		
		$bbaa$		

Jedes Glied des Produkts enthält nämlich aus jeder der vier Klammern ein a oder ein b. Diese Glieder enthalten daher entweder vier Faktoren a, oder drei Faktoren a und einen Faktor b, oder zwei Faktoren a

und zwei Faktoren b, oder einen Faktor a und drei Faktoren b oder endlich vier Faktoren b. Dies ist evident, es fragt sich nur, wie viele Glieder jeder Art auftreten. Wir können durch die Reihenfolge der Faktoren kenntlich machen, aus welchen Klammern die a und b stammen; z. B. soll $a\,a\,a\,b$ besagen, dass dieses Glied entsteht, indem wir aus den drei ersten Klammern das a und aus der letzten das b miteinander multipliziert haben; ebenso entsteht $a\,b\,b\,a$, wenn a aus der ersten und vierten Klammer mit den b aus der zweiten und dritten Klammer multipliziert wird u. s. w. Wir fassen jetzt diejenigen Glieder ins Auge, die drei Faktoren a und ein b enthalten, die also sämtlich den Wert $a^3 b$ haben; von ihnen giebt es genau so viele, als es Permutationen von den drei Grössen a und einer Grösse b giebt; denn jede Permutation liefert ein Glied des Produktes $(a+b)^4$. Ebenso giebt es Glieder, die zwei Faktoren a und zwei Faktoren b enthalten, und deren gemeinsamer Wert $a^2 b^2$ ist, genau so viele, wie es Permutationen von zwei Grössen a und zwei Grössen b giebt u. s. w. Nach einer bekannten Formel beträgt die Zahl der Permutationen von n Elementen, unter denen je α und je β gleiche vorkommen,

$$\frac{n!}{\alpha!\ \beta!}\text{ *)},$$

in unserem Fall erhalten wir daher für die bezüglichen Zahlen die Werte

$$\frac{4!}{3!\,1!}=\frac{4}{1},\quad \frac{4!}{2!\,2!}=\frac{4.3}{1.2}\text{ u. s. w.}$$

und dies sind genau die Koefficienten in der obigen Gleichung.

Es ist klar, dass sich diese Ableitung ohne weiteres auf jede positive ganze Zahl n ausdehnen lässt; es handelt sich nur darum, zu ermitteln, welches die Koefficienten der einzelnen Glieder der rechten Seite der Gleichung sind. Nach der obigen Formel sind sie resp.

$$\frac{n!}{(n-1)!},\quad \frac{n!}{(n-2)!\,2!},\quad \frac{n!}{(n-3)!\,3!}$$

oder, da $n! = n.(n-1)! = n.(n-1)(n-2)! = n.(n-1)(n-2)(n-3)! \ldots$ ist,

$$\frac{n}{1},\quad \frac{n.(n-1)}{1.2},\quad \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}\text{ u. s. w.,}$$

womit die Formel 1) bewiesen ist.

§ 2. Der Differentialquotient von x^n.

Nunmehr bilden wir den Differentialquotienten der Potenz x^n auf folgende Weise.

*) Vgl. Formel 61 des Anhangs.

Der Quotient

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

hat in dem hier vorliegenden Fall den Wert

$$1)\quad \frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\frac{(x^n+\frac{n}{1}x^{n-1}h+\frac{n.(n-1)}{1.2}x^{n-2}h^2+..+\frac{n}{1}xh^{n-1}+h^n)-x^n}{h}$$

Im Zähler fällt x^n gegen $-x^n$ weg; setzen wir dann h heraus, so wird

$$2)\quad \frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\frac{h\{\frac{n}{1}x^{n-1}+\frac{n.(n-1)}{1.2}x^{n-2}h+..+\frac{n}{1}xh^{n-2}+h^{n-1}\}}{h}$$

$$=\frac{n}{1}x^{n-1}+\frac{n.(n-1)}{1.2}x^{n-2}h+..+\frac{n}{1}xh^{n-2}+h^{n-1}.$$

Setzen wir jetzt $h=0$, so nimmt die rechte Seite den Wert nx^{n-1} an; d. h. der Differentialquotient von x^n ist nx^{n-1}.

Wir haben daher folgende Gleichung

$$3)\quad \frac{d(x^n)}{dx}=nx^{n-1}.$$

Beispielsweise ist also der Differentialquotient von x^2 gleich $2x$, derjenige von x^3 ist $3x^2$ u. s. w. Im besonderen folgt, dass der Differentialquotient von x selbst gleich 1 ist. Dies ist evident, denn für $n=1$ ist $\frac{x+h-x}{h}=1$.

§ 3. Die trigonometrischen Funktionen.

In der Elementarmathematik misst man die Winkel nach Graden. Für die höhere Mathematik hat es sich als vorteilhaft herausgestellt, eine andere Masseinheit einzuführen, und zwar in folgender Weise.

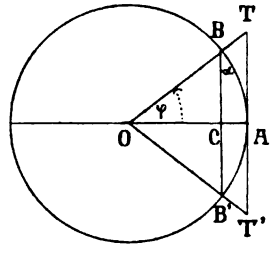


Fig. 32.

Es sei (Fig. 32) AOB ein beliebiger Winkel. Wir zeichnen um O einen Kreis, dessen Radius gleich der Längeneinheit ist, so schneidet der Winkel AOB auf diesem Kreis einen Bogen AB ab, dessen Länge die Grösse des Winkels unzweideutig bestimmt. Ihn resp. seine Länge können wir daher als Mass des Winkels betrachten; dies können wir auch so aussprechen, dass wir sinus, cosinus u. s. w. geradezu als Funktionen des Bogens ansehen können, die der bezügliche Winkel auf dem Einheitskreis bestimmt.

Zwischen den beiden Masssystemen der Winkel bestehen folgende Beziehungen. Die Peripherie eines Kreises mit dem Radius r hat die Länge $2r\pi$, die ganze Peripherie des Einheitskreises hat daher die Länge 2π; den Winkeln von

$$360^0,\ 180^0,\ 90^0,\ 60^0,\ 45^0$$

entsprechen daher Bogen, deren Länge resp.

$$2\pi,\ \pi,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{4}$$

beträgt. Ist allgemein der Winkel AOB φ^0 gross und ist α die Länge des Bogens AB, so besteht die Proportion

$$1)\quad \varphi : 360 = \alpha : 2\pi,$$

d. h. es ist

$$2)\quad \alpha = \frac{\varphi}{360} 2\pi,\ \text{resp.}\ \varphi = \frac{\alpha}{2\pi} 360.$$

Von besonderem Interesse ist es noch zu wissen, wieviel Grad derjenige Winkel beträgt, dessen Bogen AB die Länge 1 hat. Für ihn giebt die letzte Gleichung, wenn wir $x = 1$ setzen,

$$\varphi = \frac{360}{2\pi} = \frac{360}{6{,}28\cdots},$$

die Ausrechnung ergiebt

$$\varphi = 57^0,\ 29578 = 57^0\ 17'\ 44{,}8'' = 206264{,}8''.$$

Die Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ bedürfen ebenfalls einer neuen Definition. Nach bekannten Festsetzungen der gewöhnlichen Trigonometrie ist im Dreieck BOC resp. AOT

$$3)\quad \sin\varphi = \frac{BC}{OB},\quad \cos\varphi = \frac{OC}{OB},\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{TA}{OA},$$

oder wenn wir beachten, dass $OB = OA = 1$ ist,

$$\sin\varphi = BC,\quad \cos\varphi = OC,\quad \operatorname{tg}\varphi = TA;$$

d. h. mit Benützung des Einheitskreises werden sinus, cosinus und tangens direkt durch die Längen der Strecken BC, OC, TA dargestellt. Führen wir jetzt noch das eben erörterte neue Masssystem für den Winkel ein, oder mit anderen Worten, betrachten wir sinus, cosinus, tangens als Funktionen des Bogens AB, resp. seiner Länge α, so finden wir alle betrachteten Grössen in anschaulicher Weise durch die Längen von Linien dargestellt. Wir schreiben von nun an stets statt der Gleichungen 3) resp.

$$4)\quad \sin\alpha = BC,\quad \cos\alpha = OC,\quad \operatorname{tg}\alpha = TA,$$

wo also unter α in Zukunft stets die Länge des bezüglichen Bogens zu verstehen ist. Diese Festsetzung geht durch die gesamte höhere Mathematik. Der Sprachgebrauch ist leider nicht immer konsequent.

Genau genommen sollte man $\sin \alpha$ als »sinus des Bogens α« sprechen, es wird jedoch dafür auch häufig »sinus des Winkels α« gesagt; verstanden wird aber auch dann unter α der bezügliche Bogen, dessen Länge α beträgt.

Endlich haben wir noch eine letzte Ausdehnung der elementaren Definitionen zu geben. Stellen wir uns vor, dass ein Punkt P die Kreisperipherie wiederholentlich durchläuft, und dass nach dem von ihm in jedem Augenblick zurückgelegten Weg gefragt ist, so erkennen wir, dass wir mit Bogen zu rechnen haben, die grösser als 2π sind, und die jeden beliebigen Wert annehmen können.*) So hat der Punkt P nach doppeltem Umlauf einen Bogen von der Länge 4π zurückgelegt, nach dreimaligem den Bogen 6π u. s. w. Wir müssen aber auch Bogen von negativer Grösse zulassen, nämlich für den Fall, dass sich der Punkt P auf dem Kreis in umgekehrter Richtung bewegt; hat er in umgekehrter Richtung die halbe Peripherie durchlaufen, so ist dies ein Bogen von der Grösse $-\pi$, und wenn der Bogen AB die Länge α hat, so hat der Bogen AB' die Länge $-\alpha$. Der Sinus beider Bogen wird durch die Linien CB resp. CB' dargestellt, von denen die zweite ebenfalls als negativ zu betrachten ist; d. h. es gilt die Gleichung

$$5) \quad \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha).$$

Der Cosinus beider Bogen dagegen wird übereinstimmend durch die Linie OC dargestellt, d. h. es ist

$$6) \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$

woraus noch die Gleichungen

$$7) \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

folgen.

Für Bogen, die grösser als 2π sind, gelten folgende Formeln. Denken wir uns wiederum den Punkt P auf dem Kreis beweglich, so ist klar, dass jedesmal, wenn er die Stelle B passiert, der Sinus und Cosinus des zugehörigen Bogens durch die Linien BC resp. OC dargestellt wird, welches auch die Grösse dieses Bogens sein mag. D. h. es bestehen die Gleichungen

$$8) \quad \begin{array}{ll} \sin(\alpha \pm 2\pi) = \sin\alpha, & \cos(\alpha \pm 2\pi) = \cos\alpha, \\ \sin(\alpha \pm 4\pi) = \sin\alpha, & \cos(\alpha \pm 4\pi) = \cos\alpha \text{ u. s. w.} \end{array}$$

*) Vgl. die Bemerkungen über die Archimedische Spirale, S. 37.

§ 4. Der Differentialquotient von sin x und cos x.

Um den Differentialquotienten von sin x zu erhalten, bilden wir

$$1) \quad \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{2\sin\frac{x+h-x}{2}\cdot\cos\frac{x+h+x}{2}}{h}$$

$$= \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

und haben nun zu prüfen, was aus diesem Ausdruck wird, wenn wir h gegen Null konvergieren lassen. Dies ergiebt sich hier nicht so unmittelbar, wie bisher, bedarf vielmehr einer besonderen Untersuchung.

Die Fig. 32 zeigt unmittelbar, dass

Dreieck $BOB' <$ Sector $BAB'O <$ Dreieck TOT'.

Wenn nun der Kreis wieder der Einheitskreis ist und der Bogen BA die Länge $\frac{h}{2}$ hat, so folgt

$$BOB' = \tfrac{1}{2}\,BB'.\,OC = BC.\,OC = \sin\frac{h}{2}\cdot\cos\frac{h}{2}$$

$$\text{Sector } BAB'O = \tfrac{1}{2}\,OB^2\,\widehat{BB'} \overset{*)}{=} \frac{h}{2}$$

$$TOT' = \tfrac{1}{2}\,TT'.\,OA = AT.\,OA = \operatorname{tg}\frac{h}{2} = \frac{\sin\frac{h}{2}}{\cos\frac{h}{2}}$$

Die obige Ungleichung verwandelt sich daher in

$$2) \quad \sin\frac{h}{2}\cos\frac{h}{2} < \frac{h}{2} < \frac{\sin\frac{h}{2}}{\cos\frac{h}{2}}$$

resp., wenn wir noch durch $\sin\frac{h}{2}$ dividieren, in

$$3) \quad \cos\frac{h}{2} < \frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}} < \frac{1}{\cos\frac{h}{2}}$$

Der mittlere Quotient ist der Ausdruck, dessen Wert in Frage steht, resp. sein reziproker Wert. Unsere letzte Relation zeigt, dass er stets

*) Vgl. Formel 41 des Anhangs.

zwischen $\cos\frac{h}{2}$ und $1 : \cos\frac{h}{2}$ liegt, d. h. zwischen einem ächten Bruch und einem unächten Bruch. Lassen wir nun h gegen Null konvergieren, so nehmen $\cos\frac{h}{2}$ und $1 : \cos\frac{h}{2}$ beide den Wert 1 an, der Quotient, dessen Wert stets zwischen ihnen bleibt, muss daher notwendig ebenfalls den Wert 1 annehmen; in diesem Grenzfalle fallen alle drei Grössen ihrem Werte nach zusammen.

Nunmehr folgt, dass die rechte Seite der Gleichung, wenn wir h gegen Null konvergieren lassen, den Wert $\cos x$ annimmt, d. h. der Differentialquotient von $\sin x$ ist $\cos x$; es besteht also die Gleichung

$$4) \quad \frac{d \sin x}{dx} = \cos x.$$

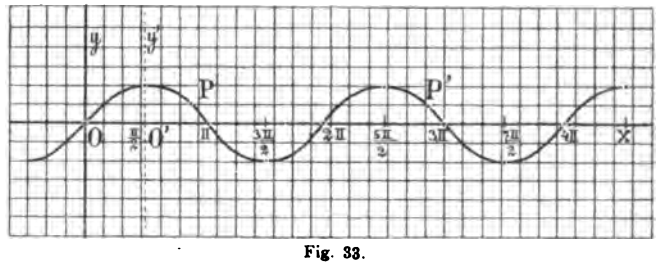


Fig. 33.

Wir entwerfen noch (Fig. 33) ein Bild der Kurve, deren Gleichung

$$5) \quad y = \sin x$$

ist. Beachten wir, dass (S. 56)

$$6) \quad \operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{d \sin x}{dx} = \cos x$$

ist, so folgt sofort, dass den Werten

$$x = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi,\ \frac{5\pi}{2},\ 3\pi \ldots\ldots$$

die resp. Werte

$$\begin{aligned} y &= \sin 0,\ \sin\frac{\pi}{2},\ \sin\pi,\ \sin\frac{3\pi}{2},\ \sin 2\pi,\ \sin\frac{5\pi}{2},\ \sin 3\pi \\ &= 0,\quad 1,\quad 0,\quad -1,\quad 0,\quad 1,\quad 0 \\ \operatorname{tg}\tau &= \cos 0,\ \cos\frac{\pi}{2},\ \cos\pi,\ \cos\frac{3\pi}{2},\ \cos 2\pi,\ \cos\frac{5\pi}{2},\ \cos 3\pi \\ &= 1,\quad 0,\quad -1,\quad 0,\quad 1,\quad 0,\quad -1 \end{aligned}$$

entsprechen. Wenn aber $\operatorname{tg}\tau$ den Wert 1 oder -1 hat, so beträgt der zugehörige Winkel 45^0 resp. 135^0, daher erhalten wir das Bild der nebenstehenden Figur, die aus lauter kongruenten Teilen besteht.

Den Grund dieser letzten Erscheinung können wir leicht erkennen. Sie ist eine direkte Folge der Gleichung

$$\sin(x+2\pi) = \sin x,$$

denn diese Gleichung sagt uns, dass zu einem beliebigen Wert von x dasselbe y gehört, wie zu dem Wert $x+2\pi$; ist also P ein Kurvenpunkt, so auch P', d. h. wir erhalten die ganze Kurve, wenn wir den von O bis 2π reichenden Teil wiederholt um die Länge 2π verschieben, und zwar ersichtlich sowohl nach rechts, wie nach links.

Die Kurve ist eine einfache Wellenlinie, und wird auch Sinuslinie genannt.

Die Differentialquotienten von $\cos x$ erhalten wir auf ähnliche Weise. Es ist*)

$$7) \quad \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = -\frac{2\sin\frac{x+h-x}{2}\cdot\sin\frac{x+h+x}{2}}{h}$$

$$= -\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

und dieser Ausdruck geht, wenn wir h gegen Null konvergieren lassen, analog zum vorstehenden in $-\sin x$ über; d. h. der Differentialquotient von $\cos x$ ist $-\sin x$. Es folgt also

$$8) \quad \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x.$$

Es liegt nahe, zu fragen, was das negative Vorzeichen in der letzten Gleichung bedeutet. Wir wissen, dass der Differentialquotient der Grenzwert des Verhältnisses von $\Delta\cos x$ und Δx ist, wo $\Delta\cos x$ den kleinen Zuwachs bedeutet, den $\cos x$ erfährt, wenn x um Δx zunimmt. Dieser Zuwachs ist also negativ; d. h. $\cos x$ nimmt zunächst ab, wenn der Bogen x zunimmt**); in der That ist ja $\cos 0 = 1$ und $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Hierin liegt offenbar ein Resultat, das für jede Funktion in Kraft bleibt, deren Differentialquotient negativ ist. Wir können in dieser Hinsicht folgenden Satz aussprechen. Nimmt eine Funktion für eine Reihe von Werten x dauernd zu, so ist ihr Differential-

*) Vgl. Anhang, Formel 43.

**) Dies gilt, so lange der Bogen x zwischen 0 und π liegt. Ist $x > \pi$, so wird zunächst $\sin x$ negativ und damit $\Delta\cos x$ wieder positiv u. s. w., wie auch aus dem zugehörigen Kurvenbild hervorgeht. (Vgl. S. 64.)

quotient für diese Werte von x positiv, nimmt sie dagegen unaufhörlich ab, so ist ihr Differentialquotient für die bezüglichen Werte von x negativ, und ebenso umgekehrt.

Wir können uns diese Thatsache folgendermassen veranschaulichen. Es sei

$$9) \quad y = f(x)$$

eine Funktion, deren graphisches Bild (Fig. 34) die nebenstehende Kurve ist. Für sie ist

$$10) \quad \operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}.$$

Ist B der höchste, D der tiefste Punkt der Kurve, so wächst die Ordinate, also auch die Funktion von A bis B und von D bis E, und man sieht unmittelbar, dass längs dieser Kurventeile der Winkel τ spitz, also $\operatorname{tg}\tau$ positiv ist; längs des Kurventeiles BCD dagegen nimmt die Ordinate, resp. die Funktion dauernd ab, längs dieses Kurventeiles ist daher τ ein stumpfer Winkel, und damit $\operatorname{tg}\tau$ negativ. Dies wird auch durch das Kurvenbild der Funktion $\cos x$ bestätigt, über das wir folgendes bemerken.

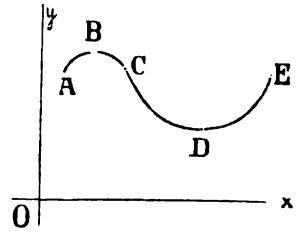


Fig. 34.

Aus den Gleichungen

$$11) \quad y = \cos x,$$

$$12) \quad \operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

folgt, dass den Werten

$$x = 0, \ \frac{\pi}{2}, \ \pi, \ \frac{3\pi}{2}, \ 2\pi, \ \frac{5\pi}{2} \ldots$$

resp. die Werte

$$y = \cos 0, \ \cos\frac{\pi}{2}, \ \cos\pi, \ \cos\frac{3\pi}{2}, \ \cos 2\pi, \ \cos\frac{5\pi}{2},$$

$$= 1 \quad 0, \quad -1, \quad 0 \quad 1, \quad 0,$$

$$\operatorname{tg}\tau = -\sin 0, \ -\sin\frac{\pi}{2}, \ -\sin\pi, \ -\sin\frac{3\pi}{2}, \ -\sin 2\pi, \ -\sin\frac{5\pi}{2}$$

$$= 0, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad -1$$

entsprechen. Die Kurve hat daher die nämliche Form, wie die Sinuskurve. (S. 64.) Wir haben, um sie zu erhalten, nur die Ordinatenaxe um die Strecke $\frac{\pi}{2}$ nach rechts zu verlegen, so dass sie durch O' geht (in Figur 33 punktiert gezeichnet). Den Beweis dieser Thatsache entnehmen wir unmittelbar aus der Formel

$$13) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x;$$

sie sagt aus, dass die Ordinate des Punktes P der Cosinuskurve, dessen Abscisse x ist, die nämliche ist, wie die Ordinate des Punktes P' der Sinuskurve, dessen Abscisse $\frac{\pi}{2}+x$ ist. Dies heisst aber, dass die Cosinuskurve durch Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ in positiver Richtung in die Sinuskurve übergeht.

§ 5. Der Differentialquotient von Summe und Differenz.

Sind $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwei Funktionen, deren Differentialquotienten man kennt, so erhält man den Differentialquotienten der Summe folgendermassen. Wir bilden

$$1) \quad \frac{[f(x+h)+\varphi(x+h)]-[f(x)+\varphi(x)]}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

und wenn wir nun h gegen Null konvergieren lassen, so gehen die Brüche der rechten Seite direkt in die Differentialquotienten von $f(x)$ und $\varphi(x)$ über, d. h. es ist

$$2) \quad \frac{d[f(x)+\varphi(x)]}{dx}=\frac{df(x)}{dx}+\frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

Der Differentialquotient der Summe zweier Funktionen ist also gleich der Summe ihrer Differentialquotienten.

Es ist klar, dass sich dieser Satz auf beliebig viele Funktionen ausdehnen lässt, d. h. es ist

$$3) \quad \frac{d}{dx}\{f(x)+\varphi(x)+\psi(x)+\ldots\}=\frac{df(x)}{dx}+\frac{d\varphi(x)}{dx}+\frac{d\psi(x)}{dx}+\ldots$$

Auf gleiche Weise erhält man den Differentialquotienten der Differenz zweier Funktionen. Hier haben wir zu bilden

$$4) \quad \frac{[f(x+h)-\varphi(x+h)]-[f(x)-\varphi(x)]}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

und nun h gegen Null konvergieren zu lassen. Es folgt sofort

$$5) \quad \frac{d[f(x)-\varphi(x)]}{dx}=\frac{df(x)}{dx}-\frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

Der Differentialquotient der Differenz zweier Funktionen ist also gleich der Differenz ihrer Differentialquotienten.

Im Interesse der Kürze pflegt man die Funktionen $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)\ldots$ durch einzelne Buchstaben, $u, v, w\ldots$ zu bezeichnen. Alsdann nehmen die obigen Gleichungen die einfache Form an:

$$6)\quad \frac{d(u+v+w+\ldots)}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}+\cdots$$

$$7)\quad \frac{d(u-v)}{dx}=\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}.$$

Dies ist die kürzeste Darstellung der beiden obigen Sätze.

Beispiele. Es ist

$$\frac{d(x+\sin x)}{dx}=\frac{dx}{dx}+\frac{d\sin x}{dx}=1+\cos x$$

$$\frac{d(x^2-\cos x)}{dx}=\frac{d(x^2)}{dx}-\frac{d\cos x}{dx}=2x+\sin x$$

$$\frac{d(x^3+x^2-x)}{dx}=\frac{d(x^3)}{dx}+\frac{d(x^2)}{dx}-\frac{dx}{dx}=3x^2+2x-1.$$

Wir können die Reihe dieser Beispiele beträchtlich vermehren, wenn wir noch folgende Bemerkungen einschalten. Wir fragen, was der Differentialquotient von $C.f(x)$ ist, wo C irgend eine Konstante, d. h. irgend eine Zahl bedeutet. Wir bilden

$$8)\quad \frac{Cf(x+h)-Cf(x)}{h}=C\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

und wenn wir h gegen Null konvergieren lassen, so ergiebt sich sofort

$$9)\quad \frac{d[Cf(x)]}{dx}=C\frac{df(x)}{dx},$$

die Konstante tritt also auch zum Differentialquotient als Faktor. Die Differentialquotienten von

$$a\,x^n,\quad b\sin x,\quad c\cos x$$

sind also resp.

$$n\,a\,x^{n-1},\quad b\cos x,\quad -c\sin x.$$

Eine zweite Bemerkung betrifft die Frage, welchen Wert der Differentialquotient einer konstanten Grösse selbst hat, resp. welches der Differentialquotient einer Funktion ist, wenn man von ihr weiss, dass sie immer denselben Wert besitzt. Dies ergiebt sich einfach wie folgt: Es sei y eine solche Funktion $f(x)$, die für alle Werte der Variabeln x den gleichen Wert besitzt; in dem Quotienten

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ist daher der Zähler für jeden Wert von x, resp. h gleich Null, also auch der Quotient selbst, und damit auch sein Grenzwert, der Differentialquotient; d. h. der Differentialquotient einer Konstanten ist Null. Es ist also, wenn C eine Konstante ist,

$$10)\quad \frac{dC}{dx}=0.$$

Dasselbe kann man sich geometrisch wie folgt veranschaulichen. Da die Funktion y durch eine Gleichung von der Form

$$y = b$$

dargestellt wird, so ist die Kurve, welche dieser Gleichung entspricht, eine Parallele zur x-Axe (S. 19), mithin ist der Winkel, den sie mit der x-Axe bildet, Null, also auch dessen Tangente, d. h. es ist

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

Beispiele. Es ist

$$\frac{d(5x^2+3x-1)}{dx} = \frac{d(5x^2)}{dx} + \frac{d(3x)}{dx} - \frac{d(1)}{dx}$$

$$= 5\frac{d(x^2)}{dx} + 3\frac{dx}{dx} = 10x+3$$

$$\frac{d(7x^3-6x^2+4)}{dx} = \frac{d(7x^3)}{dx} - \frac{d(6x^2)}{dx} = 21x^2-12x$$

$$\frac{d(ax+b\sin x+c\cos x)}{dx} = a+b\cos x-c\sin x.$$

Ist ferner

$$y = ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+px^2+qx+r,$$

wo $a, b, c \ldots p, q, r$ konstante Grössen sind, so ist

$$\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}+(n-1)bx^{n-2}+(n-2)cx^{n-2}+\ldots+2px+q.$$

§ 6. Der Differentialquotient des Produkts.

Um den Differentialquotienten des Produkts $f(x).\varphi(x)$ zu finden, verfährt man wie folgt. Man verwandelt den Quotienten

$$1) \quad \frac{f(x+h).\varphi(x+h)-f(x).\varphi(x)}{h},$$

dessen Grenzwert zu bestimmen ist, zunächst durch Addition und Subtraktion von $f(x).\varphi(x+h)$ im Zähler und erhält

$$\frac{f(x+h).\varphi(x+h)-f(x).\varphi(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h).\varphi(x+h)-f(x).\varphi(x+h)+f(x)\varphi(x+h)-f(x).\varphi(x)}{h}$$

$$= \frac{\varphi(x+h).[f(x+h)-f(x)]}{h} + \frac{f(x)[\varphi(x+h)-\varphi(x)]}{h}.$$

Lassen wir nun h gegen Null konvergieren, so folgt

$$2) \quad \frac{d[f(x).\varphi(x)]}{dx} = \varphi(x)\frac{df(x)}{dx} + f(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}$$

oder bei Einführung einfacher Funktionszeichen

$$3)\quad \frac{d(uv)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}.$$

Dies ist die Formel für den Differentialquotienten eines Produkts.

Beispiele: Es ist

$$\frac{d(x\sin x)}{dx} = \sin x\frac{dx}{dx} + x\frac{d\sin x}{dx} = \sin x + x\cos x$$

$$\frac{d(\sin x\cos x)}{dx} = \cos x\frac{d\sin x}{dx} + \sin x\frac{d\cos x}{dx} = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\frac{d(ax^2\cos x)}{dx} = a(2x\cos x - x^2\sin x)$$

$$\frac{d(x^3\sin x + a\cos x)}{dx} = 3x^2\sin x + x^3\cos x - a\sin x.$$

Hat das Produkt, von dem der Differentialquotient zu bilden ist, mehr als zwei Faktoren, so hat man es zunächst auf irgend eine Weise in zwei Faktoren zu zerlegen.

Beispiel. Gegeben sei die Funktion $x^2\sin x\cos x$, so bilde man, indem man x^2 als einen Faktor, $\sin x\cos x$ als den andern nimmt,

$$\frac{d(x^2\sin x\cos x)}{dx} = \sin x\cos x\frac{d(x^2)}{dx} + x^2\frac{d(\sin x\cos x)}{dx}$$

$$= 2x\sin x\cos x + x^2(\cos^2 x - \sin^2 x),$$

wie sich in diesem Fall aus dem zweiten der obigen Beispiele sofort ergiebt.

Wir wollen für drei Faktoren auch die bezügliche Formel ableiten. Es ist

$$\frac{d(uvw)}{dx} = vw\frac{du}{dx} + u\frac{d(vw)}{dx}$$

$$= vw\frac{du}{dx} + u\left(w\frac{dv}{dx} + v\frac{dw}{dx}\right);\ \text{d. h. also}$$

$$4)\quad \frac{d(uvw)}{dx} = vw\frac{du}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + uv\frac{dw}{dx}.$$

§ 7. Der Differentialquotient des Quotienten.

Den Differentialquotienten eines Quotienten zweier Funktionen können wir bereits aus den bisherigen Resultaten erschliessen. Wir bezeichnen die beiden Funktionen sofort kurz durch u und v, und setzen

$$1)\quad y = \frac{u}{v}.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$2) \quad u = yv,$$

und wenn wir jetzt nach der eben erhaltenen Regel auf beiden Seiten den Differentialquotienten bilden, so ergiebt sich

$$\frac{du}{dx} = v\frac{dy}{dx} + y\frac{dv}{dx}$$

und daraus finden wir den gesuchten Wert von $\frac{dy}{dx}$ in der Form

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v}\left(\frac{du}{dx} - y\frac{dv}{dx}\right).$$

Setzen wir jetzt rechts für y seinen Wert ein, so folgt schliesslich

$$3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

oder

$$4) \quad \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Dies ist die Formel für den Differentialquotienten eines Quotienten zweier Funktionen.

Die erste Anwendung dieser Formel soll darin bestehen, dass wir mit ihrer Hilfe den Differentialquotienten von $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{ctg} x$ berechnen. Da

$$5) \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

ist, so ist in diesem Fall $u = \sin x$, also $\frac{du}{dx} = \cos x$, $v = \cos x$, also $\frac{dv}{dx} = -\cos x$, und es ergiebt sich

$$\frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$ *)

also folgt

$$6) \quad \frac{d\operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

d. h. der Differentialquotient von $\operatorname{tg} x$ ist $\frac{1}{\cos^2 x}$.

Da

$$7) \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

*) Vgl. Anhang, Formel 32.

ist, so ist in diesem Fall $u = \cos x$, $v = \sin x$, also $\frac{du}{dx} = -\sin x$, $\frac{dv}{dx} = \cos x$ und es wird

$$\frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

es ist also

$$8) \quad \frac{d\operatorname{ctg} x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

der Differentialquotient von $\operatorname{ctg} x$ ist also $-\frac{1}{\sin^2 x}$.

Beispiel: Es sei zunächst

$$y = \frac{a}{x},$$

wo a eine Konstante ist, sodass $u = a$, $v = x$ ist; alsdann hat man

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{dv}{dx} = 1,$$

also ergiebt sich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{x^2}.$$

Wir machen hiervon eine Anwendung auf das Boyle-Mariotte'sche Gesetz. Nach S. 1 besteht für das Volumen v, das dem Druck p entspricht, die Gleichung

$$vp = v_0 p_0,$$

wenn p_0 der ursprüngliche Druck, v_0 das ursprüngliche Volumen bedeutet. Schreiben wir diese Gleichung in die Form

$$v = \frac{v_0 p_0}{p},$$

so erhalten wir dem obigen Beispiel gemäss

$$\frac{dv}{dp} = -\frac{v_0 p_0}{p^2}.$$

Der Differentialquotient, der negativ ist und (S. 56) den Grenzwert des Verhältnisses von Δv und Δp, d. h. der Volumzunahme und der Druckzunahme darstellt, ist nichts anderes als die Kompressibilität des Gases. Das negative Zeichen entspricht der Thatsache, dass bei der Zunahme des Druckes das Volumen abnimmt. (S. 65.) Das Verhältnis zwischen der Abnahme des Volumens und der Zunahme des Druckes ist nach unserer Gleichung umgekehrt proportional zu p^2; für

$$p = 2, \quad 3, \quad 4 \ldots .$$

ist dieses Verhältnis zu

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16} \cdots$$

proportional. Wird also der Druck hoch gesteigert, so wird die Abnahme des Volumens bald eine sehr geringe, wie die Erscheinungen bestätigen.

Wir geben noch folgende Beispiele:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = \frac{(a-x)\frac{d(a+x)}{dx} - (a+x)\frac{d(a-x)}{dx}}{(a-x)^2} = \frac{2a}{(a-x)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{\sin x}\right) = \frac{\sin x \frac{dx^2}{dx} - x^2 \frac{d\sin x}{dx}}{\sin^2 x} = \frac{2x\sin x - x^2\cos x}{\sin^2 x}$$

§ 8. Der Logarithmus und sein Differentialquotient.

Wir erinnern zunächst kurz an die Definition des Logarithmus.*) Ist

$$a^\alpha = b,$$

so nennt man α den Logarithmus von b für die Basis a und schreibt

$$\alpha = \log^a b.$$

Die Logarithmen der Potenzen

$$a^1, a^2, a^3, a^4 \ldots$$

für die Basis a sind also die Zahlen 1, 2, 3, 4 ... Der Logarithmenbegriff geht demnach von dem Gedanken aus, alle Zahlen als Potenzen einer und der nämlichen Grundzahl aufzufassen; der Exponent, der angiebt, welche Potenz die bezügliche Zahl ist, heisst ihr Logarithmus, und die Grundzahl ist die Basis des Logarithmensystems.

Die in allgemeinem Gebrauch befindlichen Logarithmentafeln benutzen — aus Gründen rechnerischer Zweckmässigkeit — die Zahl 10 als Basis; der Logarithmus von 2, den man aus der Tafel entnimmt, sagt also an, welche Potenz von 10 die Zahl 2 ist.

In der höheren Mathematik bedient man sich, wie wir bald sehen werden, mit Vorteil eines Logarithmensystems mit anderer Basis.

Wir lassen im Folgenden die Basis der Logarithmen zunächst unbestimmt.

Um den Differentialquotienten des Logarithmus zu bilden, haben wir den Wert des Quotienten

*) Vgl. auch den Anhang, Formelsammlung, § 2.

$$1)\quad \frac{\lg(x+h)-\lg x}{h}=\frac{1}{h}\lg\frac{x+h}{x}^{*})=\frac{1}{h}\lg\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

zu bestimmen, unter der Voraussetzung, dass h gegen Null konvergiert. Gemäss der Formel $\lg(a^m)=m\lg a$**) und umgekehrt erhalten wir hieraus

$$2)\quad \frac{\lg(x+h)-\lg x}{h}=\lg\left\{\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right\}.$$

Der auf der rechten Seite stehende Ausdruck, dessen Grenzwert in Frage steht, ist der Berechnung nicht unmittelbar zugänglich und bedarf einer etwas längeren Erörterung. Auf folgende Weise gelangen wir in zweckmässiger Weise zu seiner Ermittelung.

Wir setzen

$$3)\quad \frac{h}{x}=\frac{1}{\delta},\ \text{also}\ \frac{1}{h}=\frac{\delta}{x},$$

alsdann ergiebt sich

$$\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}=\left(1+\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{\delta}{x}}=\left\{\left(1+\frac{1}{\delta}\right)^{\delta}\right\}^{\frac{1}{x}}{}^{***})\ ,$$

und wenn wir nun auf beiden Seiten dieser Gleichung den Logarithmus bilden und wieder beachten, dass $\lg a^m=m\lg a$ ist, so folgt schliesslich gemäss 2)

$$4)\quad \frac{\lg(x+h)-\lg x}{h}=\frac{1}{x}\lg\left(1+\frac{1}{\delta}\right)^{\delta}.$$

Dies ist die wesentlichste Umformung, die vorzunehmen ist. Es handelt sich jetzt noch um die Bestimmung von

$$\lg\left(1+\frac{1}{\delta}\right)^{\delta},\ \text{resp. von}\ \left(1+\frac{1}{\delta}\right)^{\delta},$$

natürlich immer unter der Annahme, dass h gegen Null konvergiert. Nun geht aber aus Gleichung 3) hervor, dass, wenn h gegen Null konvergiert, d. h. wenn wir für h immer kleinere Zahlen setzen, umgekehrt δ immer mehr wächst; die Aufgabe, die wir zu erledigen haben, ist also die, den Grenzwert obiger Ausdrücke zu bestimmen, wenn δ immer grössere und grössere Werte durchläuft. Der Einfachheit halber nehmen wir zunächst einmal an, dass diese Zahlenwerte von δ lauter ganze Zahlen sind.†) Alsdann folgt für einen solchen Wert von δ nach dem binomischen Lehrsatz (S. 57)

*) Vgl. Formel 20 des Anhangs.

**) Vgl. Formel 21 des Anhangs.

***) Vgl. Formel 8 des Anhangs.

†) Es wird in Kap. VIII bewiesen, dass alle folgenden Schlüsse auch ohne diese

$$5)\quad (1+\frac{1}{\delta})^{\delta}=1+\frac{\delta}{1}\cdot\frac{1}{\delta}+\frac{\delta(\delta-1)}{1.2}(\frac{1}{\delta})^{2}+\frac{\delta(\delta-1)(\delta-2)}{1.2.3}(\frac{1}{\delta})^{3}+\ldots$$

Die rechte Seite enthält nur die ersten Glieder der Entwicklung, deren Zahl im ganzen $\delta+1$ beträgt. Wir können sie, indem wir in den einzelnen Zählern jeden Faktor durch je einen Faktor δ dividieren, folgendermassen umformen; es wird

$$6)\quad (1+\frac{1}{\delta})^{\delta}=1+\frac{1}{1}+\frac{(1-\frac{1}{\delta})}{1.2}+\frac{(1-\frac{1}{\delta})(1-\frac{2}{\delta})}{1.2.3}+\ldots..,$$

wo das Gesetz, nach dem die weiteren Glieder der Entwicklung gebildet sind, auf der Hand liegt.

Es fragt sich nun, was aus dem Ausdruck auf der rechten Seite wird, wenn h gegen Null konvergiert. Wenn h gegen Null konvergiert, so nimmt auch $\frac{1}{\delta}$, wie Gleichung 3) zeigt, den Wert Null an; um daher den bezüglichen Grenzwert zu erhalten, haben wir nur $\frac{1}{\delta}$ durch Null zu ersetzen. Thun wir dies, so nimmt die auf der rechten Seite stehende Reihe die Form

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots$$

an, während die Zahl ihrer Glieder unendlich gross wird.*) Die Summe dieser Reihe bezeichnet man durch e; d. h. man setzt

$$7)\quad e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots \text{ in inf.};$$

die so definierte Zahl e spielt in der höheren Mathematik eine ebenso wichtige Rolle, wie die Zahl π. Gleich π kann sie nur annäherungsweise berechnet werden; ihr Wert bis auf 10 Decimalen ist

$$e=2{,}7182818284\ldots.$$

Die Berechnung, wie sie sich auf Grund der obigen Gleichung gestaltet, ist sehr einfach. Wir finden

---

Annahme richtig sind; wir machen sie, weil sie der Einfachheit der Darstellung zu statten kommt.

*) Vgl. die ausführlichere Erörterung in Kap. VIII.

$$
\begin{aligned}
1+\frac{1}{1} &= 2\\
\frac{1}{2!} &= 0{,}5\\
\frac{1}{3!}=\frac{1}{2!}:3 &= 0{,}16667\ldots\\
\frac{1}{4!}=\frac{1}{3!}:4 &= 0{,}04167\ldots\\
\frac{1}{5!}=\frac{1}{4!}:5 &= 0{,}00833\ldots\\
\frac{1}{6!}=\frac{1}{5!}:6 &= 0{,}00139\ldots\\
\hline
1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!} &= 2{,}71806\ldots
\end{aligned}
$$

und erhalten daher bereits die ersten drei Stellen genau. Die Reihe ist daher zur annäherungsweisen Berechnung des wirklichen Wertes sehr geeignet.

Wir kehren nun zu der Gleichung 4) zurück und finden für den Differentialquotienten des Logarithmus

$$8)\quad \frac{d\lg x}{dx}=\frac{1}{x}\lg e.$$

Wir haben bisher keine Festsetzung darüber getroffen, was wir als Basis des Logarithmensystems nehmen. Wenn wir zunächst 10 als Basis wählen, so ist für $\lg e$ der bezügliche Wert, nämlich

$$9)\quad \overset{10}{\lg} e = \log e = 0{,}43429$$

zu setzen. Man sieht, dass der Differentialquotient des Logarithmus für diejenigen Logarithmen die einfachste Form erhält, für die

$$10)\quad \lg e = 1$$

ist, deren Basis also e selbst ist.*) Diese Logarithmen sind von demjenigen, der sie zuerst einführte, von Neper, natürliche Logarithmen genannt worden, aus dem Grunde, weil sich die Probleme, welche die Natur uns aufgiebt, bei Gebrauch der natürlichen Logarithmen einfacher darstellen; es verschwinden eben die Zahlenfaktoren, die gemäss Gl. 8) beim Gebrauch anderer Logarithmen in den Formeln auftreten.

Wir werden im Folgenden fast nur von den natürlichen Logarithmen Gebrauch machen. Für sie hat man die Bezeichnung

$$\log \text{nat}\, x \text{ oder kürzer } \ln x$$

eingeführt; wir werden uns meist der zweiten, kürzeren bedienen, wir

*) Vgl. Formel 18 des Anhangs.

werden also unter $\ln x$ stets den natürlichen Logarithmus von x verstehen, während Logarithmen, deren Basis α ist, durch $\log^{\alpha}$ bezeichnet werden sollen. Dies führt uns sofort auf Grund von Gl. 8) zu folgenden Formeln:

$$11) \quad \frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x};$$

$$12) \quad \frac{d \log^{\alpha} x}{dx} = \frac{1}{x} \log^{\alpha} e.$$

Der Differentialquotient des natürlichen Logarithmus ist also $\frac{1}{x}$.

Beziehungen zwischen Logarithmen mit verschiedener Basis. Ist

$$\alpha^a = x \text{ und } \beta^b = x,$$

so ist nach der Definition der Logarithmen

$$a = \log^{\alpha} x, \; b = \log^{\beta} x.$$

Ferner folgt aus der Gleichung

$$\alpha^a = \beta^b,$$

wenn wir auf beiden Seiten die Logarithmen für die Basis α nehmen

$$a = b \log^{\alpha} \beta.$$

Setzen wir hier für a und b ihre Werte, so ergiebt sich

$$\log^{\alpha} x = \log^{\beta} x \log^{\alpha} \beta, \text{ oder}$$

$$13) \quad \log^{\beta} x = \frac{\log^{\alpha} x}{\log^{\alpha} \beta}.$$

Diese Gleichung dient dazu, den Logarithmus irgend einer Zahl für die Basis β zu berechnen, wenn man die Logarithmen für die Basis α kennt.

Ist im besonderen $\alpha = 10$ und $\beta = e$, so dass $\log^{\alpha} x$ den gewöhnlichen (Briggischen) Logarithmus $\log x$, dagegen $\log^{\beta} x$ den natürlichen Logarithmus $\ln x$ darstellt, so geht die Formel (21) in

$$14) \quad \ln x = \frac{\log x}{\log e}$$

über. Um also den natürlichen Logarithmus von x zu erhalten, hat man nur den Briggischen Logarithmus durch den Logarithmus von e zu dividieren, resp. mit dessen reciprokem Wert zu multiplizieren. Dieser Wert ist in den Logarithmentafeln angegeben; er ist

$$15) \quad \frac{1}{\log e} = 2{,}302585.$$

Man erhält daher beispielsweise

$$\ln 2 = \log 2 \,.\, 2{,}302585$$
$$= 0{,}30102 \,.\, 2{,}302585 = 0{,}6931.$$

Man bezeichnet $\log e = 0{,}43429$ als den Modulus der Briggischen Logarithmen, und setzt ihn gleich M.

Wir geben zum Schluss noch eine graphische Darstellung der Funktion des natürlichen Logarithmus (Fig. 35), d. h. der Gleichung

$$16) \quad y = \ln x.$$

Es ist*)

$$\ln e = 1, \ \ln e^2 = 2, \ \ln e^3 = 3 \ldots.$$
$$\ln \frac{1}{e} = -1, \ \ln \frac{1}{e^2} = -2, \ \ln \frac{1}{e^3} = -3 \ldots.$$

und demgemäss erhalten wir folgende Tabelle zusammengehöriger Werte von x und y, resp. $\operatorname{tg}\tau$

$x = 0,$	$\frac{1}{e^2},$	$\frac{1}{e},$	$1,$	$e,$	$e^2,$	∞
$y = -\infty,$	$-2,$	$-1,$	$0,$	$1,$	$2,$	∞
$\operatorname{tg}\tau = \infty,$	$e^2,$	$e,$	$1,$	$\frac{1}{e},$	$\frac{1}{e^2},$	$0.$

Beachten wir noch, dass es Logarithmen negativer Zahlen nicht giebt, dass also zu negativen Werten von x keine Kurvenpunkte gehören, so erhalten wir die nebenstehende Figur als Bild des Logarithmus. Sie zeigt, dass, wenn x von 1 bis ∞ wächst, der Logarithmus zwar ebenfalls bis ∞ ansteigt, aber nur in sehr langsamer Weise, dass er dagegen, wenn x von 1 bis 0 abnimmt, von 0 bis $-\infty$ heruntergeht, und zwar in sehr schnellem Masse. Ferner ist der Winkel, den die Kurventangente mit der x-Axe einschliesst, zuerst 90^0, er nimmt stetig ab, im Punkte $x = 1$, $y = 0$ ist er 45^0, und wird zuletzt Null. Die Kurve schneidet also die x-Axe unter einem Winkel von 45^0.

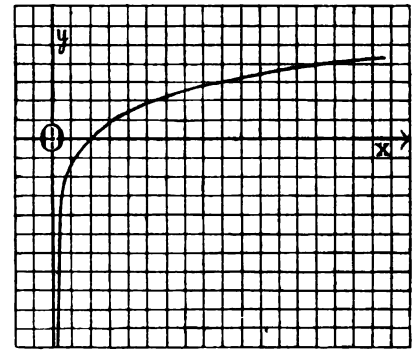


Fig. 35.

*) Vgl. Formel 21 und 24 des Anhangs.

§ 9. Die Exponentialfunktion.

Aus der Gleichung

$$1) \quad x = \ln y$$

folgt durch einfachen Uebergang zur Potenzgleichung

$$2) \quad y = e^x.^*)$$

Wir sind damit zu einer neuen Funktion e^x gelangt, die wir als Umkehrung des Logarithmus ansehen können. Diese Funktion, d. h. die x-te Potenz von e, in der x als Exponent auftritt, führt den Namen Exponentialfunktion.

Ihren Differentialquotienten erhalten wir auf folgendem einfachen Wege. Aus der Gleichung 1) folgt durch Differentiation

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$$

oder, nach Umkehrung der Brüche,

$$\frac{dy}{dx} = y.$$

Setzen wir hier für y nach 2) seinen Wert, so hat man sofort

$$3) \quad \frac{de^x}{dx} = e^x.$$

Der Differentialquotient der Exponentialfunktion ist also sie selbst. Gerade diese Eigenschaft ist es, die ihre Wichtigkeit für die Naturprozesse begründet.

Ein graphisches Bild der Exponentialfunktion, resp. ihre Kurve ist in Fig. 35 schon enthalten. Der Uebergang von Gleichung 1) zu Gleichung 2), d. h. vom Logarithmus zur Exponentialfunktion kommt darauf hinaus, dass wir einmal x als Funktion von y, das andere Mal y als Funktion von x auffassen. Wir brauchen also in Fig. 35 nur die x- und y-Axe zu vertauschen, so erhalten wir das Bild der Exponentialfunktion. Geht x von 0 bis ∞, so geht e^x von 1 bis ∞ und wächst ausserordentlich schnell; geht x von 0 bis $-\infty$, so fällt die Exponentialfunktion von 1 bis 0, aber in sehr langsamem Tempo. Für jeden positiven oder negativen Wert von x ist also das zugehörige y positiv, dem Umstand entsprechend, dass $e^{-x} = 1 : e^x$. Dasselbe gilt für $\operatorname{tg}\tau$, da ja $\operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx} = e^x$ ist.

Um die Bedeutung der Exponentialfunktion für die Naturphänomene ins rechte Licht zu setzen, mag folgende Erörterung dienen. Wir gehen

*) Vgl. Formelsammlung, § 2 des Anhangs.

von der Formel der Zinseszinsrechnung aus und setzen ihre Ableitung kurz hierher. Steht ein Kapital von c Mark zu $p\%$ ein Jahr auf Zinsen, so betragen die Zinsen $c \cdot \frac{p}{100}$, das Kapital mit den Zinsen beläuft sich alsdann auf

$$c_1 = c + c\,\frac{p}{100} = c\,(1 + \frac{p}{100}).$$

Das Kapital c_1, das im zweiten Jahr auf Zinsen steht, ist mit den Zinsen am Ende des zweiten Jahres auf

$$c_2 = c_1 + c_1 \cdot \frac{p}{100} = c_1\,(1 + \frac{p}{100}) = c\,(1 + \frac{p}{100})^2$$

angewachsen; so weiter schliessend findet man, dass es am Ende von n Jahren zu

$$4) \quad c_n = c\,(1 + \frac{p}{100})^n$$

geworden ist.

Nehmen wir jetzt an, dass die Zinsen bereits jeden Monat zum Kapital hinzukommen und sich so jeden Monat die zinstragende Geldmenge erhöht, so beträgt nach einem Monat das Kapital nebst Zinsen

$$c_1 = c + c \cdot \frac{p}{100.12} = c\,(1 + \frac{p}{12.100}),$$

am Ende des zweiten Monats ist es zu

$$c_2 = c_1\,(1 + \frac{p}{12.100}) = c\,(1 + \frac{p}{12.100})^2$$

geworden u. s. w.; am Ende eines Jahres hat das Kapital schliesslich den Wert

$$5) \quad C = c\,(1 + \frac{p}{12.100})^{12}.$$

Man sieht sofort, wie die Formel sich weiter verändert, wenn man die Zinsen bereits jeden Tag, jede Stunde zum Kapital schlägt. Dabei nähert man sich dem, was in der Natur statt hat. Wenn in der anorganischen oder organischen Natur ein Prozess abläuft, bei dem irgend ein Agens durch seine eigene Wirkungsart sich stetig mehrt, so geschieht es immer so, dass dasjenige, was in jedem Augenblick neu entsteht, sofort die Funktionen des wirkenden Agens mit übernimmt. Um der obigen Formel hierauf Geltung zu geben, haben wir 12 durch eine Zahl n zu ersetzen, die über alle Massen wächst; bezeichnen wir noch $\frac{p}{100}$ durch x, so finden wir

$$C = c\left\{\text{limes}\,(1 + \frac{x}{n})^n\right\},$$

wo n über alle Grenzen wachsen muss. Nunmehr setzen wir noch

$$\frac{x}{n} = \frac{1}{\delta}, \text{ also } n = \delta x,$$

so folgt

$$(1+\frac{x}{n})^n = (1+\frac{1}{\delta})^{\delta x} = \left[(1+\frac{1}{\delta})^{\delta}\right]^{x*)}$$

und wenn wir jetzt, wie nötig, δ gegen Null konvergieren lassen, so folgt

$$6) \quad C = c\,e^x.$$

Die Exponentialfunktion e^x stellt also den Vermehrungsfaktor einer aktiven Masse für die Zeit eines Jahres, resp. die sonst massgebende Zeiteinheit dar, vorausgesetzt, dass die Vermehrung in jedem Augenblick der aktiven Masse proportional stattfindet.

§ 10. Die Kreisfunktionen.

Wird

$$1) \quad x = \sin y$$

gesetzt, so kann man auch y als eine Funktion von x auffassen; y ist derjenige Bogen, dessen Sinus die Länge x hat. Man hat hiefür die Bezeichnung

$$2) \quad y = \text{arc}\,(\sin x) = \text{arc}\sin x$$

eingeführt, die eben sagt, dass y der arcus (= Bogen) ist, dessen Sinus gleich x ist.

In derselben Weise ergiebt sich durch Umkehrung von

$$3) \quad x = \cos y,$$

dass y derjenige Bogen ist, dessen Cosinus die Länge x hat, und dies wird durch

$$4) \quad y = \text{arc}\,(\cos x) = \text{arc}\cos x$$

bezeichnet. Endlich führen in ganz analoger Weise

$$5) \quad x = \text{tg}\,y \text{ und } x = \text{ctg}\,y$$

auf die umgekehrten Funktionen

$$6) \quad y = \text{arc tg}\,x \text{ und } y = \text{arc ctg}\,x.$$

Man bezeichnet die Funktionen Arcus sinus x, Arcus cosinus x, Arcus tangens x und Arcus cotangens x als cyclometrische oder Kreisfunktionen.

Ihre Differentialquotienten erhalten wir nach der gleichen Methode, die wir soeben in § 9 befolgt haben. Aus 1) folgt durch Differentiation

$$\frac{dx}{dy} = \cos y$$

*) Vgl. Formel 8 des Anhangs.

und da $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$*) $= \sqrt{1-x^2}$ ist, so erhält man weiter

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \text{ d. h.}$$

$$7) \quad \frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ebenso ergiebt sich durch Differentiation von 3)

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y$$

und da wieder $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y}$*) $= \sqrt{1-x^2}$ ist,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ d. h.}$$

$$8) \quad \frac{d \arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich aus Gleichung 5)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} \text{ resp. } \frac{dx}{dy} = \frac{-1}{\sin^2 y}$$

und hieraus fliesst endlich, da**)

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x} = \frac{1}{1+x^2}$$

ist, schliesslich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}, \text{ resp. } \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}, \text{ d. h.}$$

$$9) \quad \frac{d \operatorname{arc\,tg} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{d \operatorname{arc\,ctg} x}{dx} = \frac{-1}{1+x^2}.$$

§ 11. Das Differential.

Nach S. 56 ist der Differentialquotient der Funktion $y = f(x)$ der Grenzwert des Quotienten

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x},$$

der das Verhältnis zwischen dem Zuwachs der Funktion und dem Zuwachs der unabhängigen Variabeln darstellt. Für jede Funktion hat

*) Vgl. Formel 33 des Anhangs.

**) Vgl. Formel 34 des Anhangs.

sich im Vorstehenden als Differentialquotient eine bestimmte neue Funktion ergeben, als Zeichen dafür haben wir die Quotienten

$$\frac{dy}{dx} \text{ resp. } \frac{df(x)}{dx}$$

eingeführt. Ob und was die genaue Bedeutung von Zähler und Nenner dieser Quotienten ist, auf diese naheliegende Frage sind wir noch nicht eingegangen. Versuchen wir uns jetzt darüber Rechenschaft zu geben. Es wird sich auch hier (S. 45) wieder zeigen, dass ihre exakte Bestimmung nur aus den Formeln selbst geschöpft werden kann, während ihre Beziehung zu den behandelten Aufgaben nur annäherungsweise definierbar ist.

Denken wir uns zu diesem Zweck wieder die Kurve (Fig. 36), die der Gleichung

$$1) \quad y = f(x)$$

entspricht, auf ihr den Punkt P, in der Nähe den Punkt P_1, und in P die Tangente. Ferner sei PL parallel und gleich zu QQ_1 und T der Schnittpunkt der Tangente mit P_1Q_1. Alsdann folgt aus dem Dreieck PTL

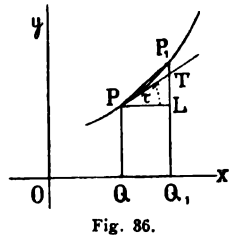


Fig. 36.

$$2) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \tau = \frac{TL}{LP}.$$

Setzt man nun $PL = dx$, versteht man also unter dx einen kleinen Zuwachs von x, so folgt aus der obigen Gleichung

$$3) \quad dy = TL,$$

d. h. dy ist gleich demjenigen Zuwachs, den y erfahren würde, wenn die Kurve sich von P an geradlinig fortsetzte und das Verhältnis dieser kleinen Grössen dy und dx ist der Differentialquotient. Um uns dy geometrisch zu veranschaulichen, haben wir also die Kurve für einen Augenblick durch ihre Tangente zu ersetzen.

Handelt es sich ferner um eine Bewegung, die nach der Gleichung $s = \varphi(t)$ erfolgt, beispielsweise also wieder um die Fallbewegung, so ist für sie (S. 51)

$$4) \quad \frac{ds}{dt} = v = gt,$$

und wenn wir jetzt unter dt eine kleine Zeit verstehen und annehmen, dass die Geschwindigkeit während derselben sich nicht änderte, so würde ds die in dieser Zeit durchlaufene Strecke sein. Wir haben also die Definition von ds wieder an die Annahme zu knüpfen, dass der fallende Punkt sich gleichmässig weiter bewegte, und für diese Bewegung stellt ds den in der Zeit dt durchlaufenen Weg dar. Dies

entspricht genau dem auch sonst geläufigen Sprachgebrauch, dass die Geschwindigkeit in P diejenige Geschwindigkeit ist, mit der sich der Punkt weiter bewegen würde, wenn er seine Geschwindigkeit von P an beibehielte. Schreiben wir noch Gl. 4) in die Form

$$ds = gt\,dt,$$

so sehen wir, dass ds in jedem Augenblick gt mal so gross ist, wie dt.

Allgemein zu reden, haben wir daher folgendes Ergebnis. Ist

$$y = f(x)$$

eine beliebige Funktion, und versteht man unter dx einen kleinen Zuwachs von x, so stellt dy resp. $df(x)$ denjenigen kleinen Zuwachs der Funktion dar, den sie erfahren würde, wenn sie ihr Wachstum von dem Wert x an bis zu $x + dx$ gleichmässig beibehielte, und das Verhältnis dieser Aenderungen ist der Differentialquotient.

Hiermit haben wir das Hauptresultat der allgemeinen Theorie abgeleitet. Ganz im Sinn von S. 42 lautet es dahin, dass wir statt des wirklichen Zuwachses Δy der Funktion mit demjenigen Zuwachs dy rechnen, den wir erhalten, wenn wir die Funktion durch eine sich während eines kleinen Intervalls gleichmässig ändernde Funktion ersetzen.

Ehe wir die Anwendung auf die einzelnen Funktionen machen, haben wir noch eine Bezeichnung einzuführen, die von Lagrange*) stammt, und hier zweckmässig eine Stelle findet. Wir bezeichnen nach Lagrange diejenige Funktion, die den Differentialquotienten von y resp. $f(x)$ darstellt, kurz durch

$$y' \text{ resp. } f'(x)$$

und nennen sie auch Ableitung; Ableitung und Differentialquotient sind daher nur zwei verschiedene Worte für die nämliche Funktion. Es folgen nun aus den Gleichungen

$$5)\quad \frac{dy}{dx} = y' \text{ und } \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

die weiteren Gleichungen

$$6)\quad dy = y'\,dx,\ df(x) = f'(x)\,dx,$$

die für jede Funktion den Wert der eben definierten Grössen dy resp. $df(x)$ angeben.

Die Grössen dx, dy, $df(x)$, ds, dt u. s. w. nennt man Differentiale, insbesondere dx das Differential von x, $df(x)$ das Differential von $f(x)$; man sagt dem entsprechend, dass die Geschwindigkeit v das

*) Lagrange, berühmter französischer Mathematiker, der von 1736 bis 1813 lebte.

Verhältnis zwischen dem Differential des Weges und dem Differential der Zeit ist u. s. w. u. s. w.

Der Vorteil der Einführung der Differentiale besteht zunächst darin, dass sie zu Formeln führen, die keinen Nenner enthalten; weitere Vorteile werden wir später kennen lernen. Wir setzen nun die Werte der Differentiale für die einzelnen Funktionen hierher, indem wir die früher abgeleiteten Formeln für die Differentialquotienten von ihren Nennern befreien, und finden

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx$$

$$d\sin x = \cos x\,dx,\quad d\cos x = -\sin x\,dx$$

$$d\operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x},\quad d\operatorname{ctg} x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$d\ln x = \frac{dx}{x},\quad de^x = e^x dx.$$

$$d\arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad d\arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$d\operatorname{arc\,tg} x = \frac{dx}{1+x^2},\qquad d\operatorname{arc\,ctg} x = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

Dazu fügen wir die Formeln für Summe, Differenz, Produkt, Quotient, nämlich

$$d(u+v+w) = du+dv+dw$$

$$d(u-v) = du-dv$$

$$d(uv) = v\,du+u\,dv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du-u\,dv}{v^2}.$$

Hierzu fügen wir endlich (S. 67)

$$d[Cf(x)] = Cdf(x),\quad dC = 0.$$

Wenn man von einer Funktion oder einem Ausdruck das Differential bildet, so übt man damit eine Thätigkeit aus, die man als differenzieren bezeichnet.

Beispiele. Wir lassen zunächst einige formale Beispiele des Differenzierens folgen. Es ist

$$d(ax^3+bx^2+cx+1) = d(ax^3)+d(bx^2)+d(cx) = (3ax^2+2bx+c)dx$$

$$d(x^n\sin x) = \sin x\,d(x^n)+x^n d\sin x = \sin x\,nx^{n-1}dx+x^n\cos x\,dx$$

$$= x^{n-1}(n\sin x+x\cos x)\,dx$$

$$d(x\ln x) = \ln x\,dx+x\frac{dx}{x} = dx(1+\ln x)$$

$$d\left(\frac{a-x}{a+x}\right) = \frac{(a+x)\,d(a-x)-(a-x)\,d(a+x)}{(a+x)^2} = \frac{-2x\,dx}{(a+x)^2}.$$

Wir fügen noch eine Formel an, die vielfach anwendbar ist; sie ergiebt sich durch Division der obigen Gleichung für $d(uv)$ durch uv. Man findet

$$\frac{d(uv)}{uv} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}.$$

In ähnlicher Weise erhalten wir aus der Gleichung 4) von S. 69 durch Division mit uvw

$$\frac{d(uvw)}{uvw} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w}.$$

Bemerkung 1. Es liegt nahe, zu fragen, in welcher Beziehung dy und Δy zu einander stehen. Δy bedeutet den wirklichen Zuwachs von y, der einem kleinen Zuwachs Δx von x entspricht. Gehen wir auf Fig. 36 zurück und setzen

$$PL = dx = \Delta x,$$

so ist

$$\Delta y = P_1 L = P_1 T + TL$$
$$= dy + P_1 T;$$

es unterscheiden sich also Δy und dy um die kleine Strecke $P_1 T$. Diese Strecke vermindert sich in um so höherem Masse, je näher wir P und P_1 aneinander nehmen. Wir wollen diese Strecke für das Beispiel der Parabel wirklich berechnen. Nach S. 49 war

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{p} + \frac{h}{2p}.$$

Setzen wir hier für $\frac{x}{p}$ seinen Wert $\frac{dy}{dx}$ und beachten, dass

$$h = dx = \Delta x$$

sein soll, so folgt

$$\Delta y = dy + \frac{(dx)^2}{2p},$$

die Differenz zwischen Δy und dy ist daher dem Quadrat von dx proportional; beträgt dx ein Tausendstel, so ist sie nur von der Grössenordnung eines Millionstels. Der Fehler, den man begeht, wenn man unter dy geradezu den Zuwachs der Funktion, d. h. Δy versteht, fällt daher praktisch nicht ins Gewicht. Es ist daher auch gestattet, unter dem Differentialquotienten das Verhältnis zwischen einem sehr kleinen Zuwachs der Funktion selbst und einem sehr kleinen Zuwachs der Variablen zu verstehen.

Bemerkung 2. Für dx, dy u. s. w. hat man, da sie sehr kleine Grössen bedeuten, die man sich beliebig klein denken darf, das Wort »unendlich kleine« Grössen eingeführt. Darnach pflegt man zu sagen, dass der Differentialquotient das Verhältnis der unendlich kleinen Aenderungen von y und x darstellt und dass es daher die Aufgabe der Differentialrechnung ist, für irgend zwei veränderliche Grössen, die in einer funktionellen Abhängigkeit von einander stehen, das Verhältnis zwischen der unendlich kleinen Aenderung der einen und der unendlich kleinen Aenderung der anderen zu berechnen.**) Das Quadrat von dx, also $(dx)^2$ bezeichnet man als eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung. Nimmt man dx so klein an, dass es mit Rücksicht auf die zu erzielende Genauigkeit gegen endliche Grössen vernachlässigt werden kann, so kann man in demselben Sinne $(dx)^2$ gegen dx vernachlässigen u. s. w. Ist z. B. $dx = 0{,}001$, so ist $(dx)^2 = 0{,}001^2$, und wenn man 0,001 gegen 1 selbst vernachlässigen kann, so kann man auch $0{,}001^2$ gegen 0,001 vernachlässigen u. s. w.

**) Die bezüglichen Lehren der höheren Mathematik werden mit Rücksicht hierauf auch als Infinitesimalrechnung bezeichnet.

§ 12. Das Differential einer Potenz für beliebige Exponenten.

Die erste Anwendung, die wir machen, soll die sein, dass wir zeigen, dass die Formel für den Differentialquotienten, resp. die Differentiation einer Potenz, nämlich

$$1) \quad d(x^n) = n x^{n-1} dx$$

auch dann noch gilt, wenn n eine gebrochene Zahl ist.*) Es sei also jetzt in der Gleichung $y = x^n$

$$2) \quad n = \frac{p}{q},$$

wo p und q ganze Zahlen sind, es sei also

$$3) \quad y = x^{\frac{p}{q}}.$$

Hieraus folgt durch Potenzierung

$$4) \quad y^q = x^p.$$

Differenzieren wir diese Gleichung, so folgt gemäss Gleichung 1), da jetzt p und q ganze Zahlen sind,

$$q y^{q-1} dy = p x^{p-1} dx$$

und hieraus ergiebt sich

$$5) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}.$$

Wir erweitern rechts mit y und setzen dann in Zähler und Nenner für y resp. y^q ihre Werte aus 3) und 4) ein und finden so

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1} \cdot x^{\frac{p}{q}}}{x^p}$$

oder endlich**)

$$6) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d(x^{\frac{p}{q}})}{dx} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Dies ist genau die nämliche Formel, wie diejenige, die für ganzzahliges n besteht. Als Formel in Differentialen erhalten wir noch

$$7) \quad d(x^{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} dx.$$

Die Formel für den Differentialquotienten von x^n gilt sogar auch, wenn n irgend eine negative ganze oder gebrochene Zahl ist.***) Sei jetzt $n = -m$, so dass m eine positive Zahl ist, so folgt aus

$$8) \quad y = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

*) Vgl. Formel 15 des Anhangs.
**) Vgl. Formel 6 und 7 des Anhangs.
***) Vgl. Formel 13 des Anhangs.

zunächst die Gleichung

$$y x^m = 1.$$

Differenzieren wir diese Gleichung, so finden wir

$$x^m dy + y m x^{m-1} dx = 0$$

und hieraus

$$\frac{dy}{dx} = -m \frac{y x^{m-1}}{x^m} = -m y x^{-1}.$$

Setzen wir hier für y seinen Wert aus 8) ein, so wird schliesslich

$$9) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d(x^{-m})}{dx} = -m x^{-m-1},$$

und dies ist in der That die nämliche Formel, die für positives n gilt. Die Differentialformel wird

$$10) \quad d(x^{-m}) = -m x^{-m-1} dx.$$

Wir gelangen also zu dem Resultat, dass die Formeln

$$\frac{d(x^n)}{dx} = n x^{n-1}, \quad d(x^n) = n x^{n-1} dx$$

richtig sind, wenn n eine beliebige positive oder negative ganze oder gebrochene Zahl ist.

Im besonderen ergiebt sich

$$11) \quad d\left(\frac{1}{x}\right) = d(x^{-1}) = -x^{-2} dx = -\frac{dx}{x^2}$$

$$12) \quad d(\sqrt{x}) = d(x^{\frac{1}{2}}) = \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$d\sqrt[3]{x^2} = \tfrac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{2\,dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Die beiden ersten Formeln werden so häufig angewandt, dass es sich empfiehlt, sie ebenfalls zu merken.

Einige weitere Beispiele sind folgende:

$$d\left(\frac{a}{x}\right) = d(a x^{-1}) = -\frac{a\,dx}{x^2}$$

$$d\left(\frac{a}{x^n}\right) = d(a x^{-n}) = -\frac{a\,dx}{x^{n+1}}$$

$$d\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right) = d(a x^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{a\,dx}{2\sqrt{x^3}}.$$

Die ersten beiden haben wir früher nur mit der Regel über die Differentiation eines Quotienten behandeln können, während sie sich hier viel einfacher berechnen lassen.

§ 13. Differentiation der Funktionen von Funktionen.

Unsere bisherigen Formeln gestatten, die Differentiation einer grossen Reihe von Ausdrücken auszuführen, die analog wie die behandelten Beispiele, aus den einfachen Funktionen zusammengesetzt sind. Sie reichen aber noch nicht aus, um so einfache Funktionen, wie

$$1) \quad \sqrt{(a^2+x^2)}, \quad \sin(x-\alpha), \quad \ln\frac{a-x}{b-x},$$

zu differenzieren, und doch sind es gerade diese Funktionen, die in den Anwendungen viel häufiger auftreten, als $\sin x$, x^n oder $\ln x$ selbst. Um diese Funktionen zu behandeln, bedürfen wir der Kenntnis eines allgemeinen Verfahrens, das wir jetzt auseinander setzen wollen. Jede der obigen Funktionen ist die Funktion von einer Funktion von x, die erste ist eine Potenz von a^2+x^2, die zweite der Sinus von einer Differenz, die dritte der Logarithmus eines Quotienten. Sie haben daher sämtlich die Form

$$2) \quad y = F(u),$$

wo u wieder eine Funktion von x ist; wir bezeichnen dieselbe durch

$$3) \quad u = \varphi(x),$$

so dass sich für y, in allgemeinen Funktionszeichen geschrieben, die Form

$$4) \quad y = F[\varphi(x)]$$

ergiebt. Wir fassen auf Grund von Gl. 2) y zunächst als Funktion von u auf; aus ihr erhalten wir, wenn wir differenzieren,

$$5) \quad dy = dF(u)$$

und hieraus gemäss Gl. 6) von § 11 sofort

$$6) \quad dy = F'(u)\,du$$

und jetzt haben wir nur noch für u und du die bezüglichen Werte einzusetzen. Für u ist der Wert aus 3) selbst zu entnehmen; für du erhalten wir durch Differentiation von 3)

$$7) \quad du = d\varphi(x) = \varphi'(x)\,dx.$$

Führen wir die Substitutionen in Gl. 6) formal aus, so erhalten wir schliesslich

$$8) \quad dy = F'[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx.$$

Wir behandeln sofort die oben stehenden Beispiele. Es sei zunächst

$$y = \sqrt{a^2+x^2}.$$

Wir setzen

$$u = a^2+x^2,$$

so dass

$$y = \sqrt{u}$$

wird. Hieraus folgt (vgl. Beispiel 2 des letzten Paragraphen)

$$dy = \frac{du}{2\sqrt{u}};$$

ferner ist

$$du = 2x\,dx,$$

also folgt durch Einsetzen

$$dy = \{d\sqrt{a^2+x^2}\} = \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Ist ferner

$$y = \sin(x-\alpha),$$

so wird, wenn wir

$$u = x - \alpha$$

setzen,

$$y = \sin u,$$
$$dy = \cos u\,du.$$

Ferner ergiebt sich nun

$$du = dx,$$

mithin erhalten wir schliesslich

$$dy = d[\sin(x-\alpha)] = \cos(x-\alpha)\,dx.$$

Ist endlich

$$y = \ln\frac{a-x}{b-x},$$

so setzen wir zunächst

$$u = \frac{a-x}{b-x},$$

alsdann wird

$$y = \ln u,$$
$$dy = \frac{1}{u}\,du.$$

Andererseits ist

$$du = \frac{(b-x)\,d(a-x) - (a-x)\,d(b-x)}{(b-x)^2} = \frac{(a-b)\,dx}{(b-x)^2};$$

folglich ergiebt sich schliesslich

$$dy = \frac{b-x}{a-x}\,\frac{a-b}{(b-x)^2}\,dx,$$

d. h.

$$d\ln\frac{a-x}{b-x} = \frac{a-b}{(a-x)(b-x)}\,dx.$$

Eine letzte Anwendung soll die sein, dass wir das Differential der Funktion a^x berechnen, die der Funktion e^x analog ist. Es ist*)

$$a = e^{\ln a},$$

*) Vgl. Formel 16 des Anhangs.

und daraus folgt

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}.$$

Wir setzen jetzt

$$x \ln a = u$$

und finden

$$da^x = de^u = e^u\, du,$$

und da $du = \ln a \,.\, dx$ ist, so ist

$$9) \quad da^x = a^x \ln a \,.\, dx.$$

Für den Differentialquotienten erhalten wir also

$$10) \quad \frac{d(a^x)}{dx} = a^x \ln a.$$

Von der Formel für e^x unterscheidet sich diese Formel durch den Faktor $\ln a$ in derselben Weise, wie sich die Formeln für die Differentialquotienten der künstlichen Logarithmen von der für den natürlichen unterscheiden.

Man kann sich die vorstehenden Rechnungen formal insofern vereinfachen, als man nicht nötig hat, das Funktionszeichen u, das ja nur zur Abkürzung für resp. $a^2 + x^2 \ldots$ eingeführt ist und schliesslich doch durch seinen eigentlichen Wert ersetzt wird, wirklich zu benützen. Man kann daher sofort folgendermassen verfahren. Da aus

$$y = \sqrt{u}$$
$$dy = \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

folgt, so erhalten wir aus der Gleichung

$$y = \sqrt{a^2 + x^2}$$

sofort, indem wir $a^2 + x^2$ als das u der Formel betrachten,

$$dy = \frac{d(a^2 + x^2)}{2\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

In dieser Formel haben wir nun den Zähler weiter zu behandeln; wir finden sofort

$$dy = \frac{d(x^2)}{2\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{2x\,dx}{2\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Einige weitere Beispiele sind die folgenden:

$$y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$dy = \frac{d\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \frac{(1-x)\,d(1+x) - (1+x)\,d(1-x)}{2(1-x)^2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$$

$$= \frac{(1-x)\,dx + (1+x)\,dx}{2(1-x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}.$$

$$y = ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$dy = \frac{d(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{dx + d(\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{dx + \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{dx\sqrt{1+x^2} + x\,dx}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}$$

$$= \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y = \sin^2(mx - \alpha)$$

$$dy = 2\sin(mx-\alpha) \,.\, d[\sin(mx-\alpha)]$$

$$= 2\sin(mx-\alpha) \,.\, \cos(mx-\alpha) \,.\, d(mx-\alpha)$$

$$= 2\sin(mx-\alpha)\cos(mx-\alpha) \,.\, m \,.\, dx,$$

wofür man auch*)

$$dy = \sin\{2(mx-\alpha)\} \,.\, m\,dx$$

schreiben kann.

Bemerkung. Bei einiger Uebung ist es nicht schwierig, so zu verfahren, wie es hier zuletzt geschehen ist. Es ist aber dem Anfänger dringend zu raten, die Rechnung zunächst so auszuführen, dass er für jeden bezüglichen Ausdruck zuerst ein Funktionszeichen wirklich einführt. Die Berechnung der Differentiale der Funktionen von Funktionen ist die einzige Aufgabe, bei der sich leicht Fehler einstellen können, so lange es an der nötigen Gewandtheit auf diesem Gebiete mangelt.

§ 14. Stetigkeit und Unstetigkeit.

Zum Begriff des Differentialquotienten einer Funktion gelangten wir, indem wir uns die Aufgabe stellten, die Lage der Tangente einer Kurve, die momentane Geschwindigkeit eines Punktes, resp. den momentanen Ausdehnungskoeffizienten eines Stabes zu berechnen. In allen diesen Fällen handelte es sich demnach um die Ermittelung einer Grösse von ganz bestimmter geometrischer, resp. physikalischer Bedeutung.

Die Methode der Berechnung der Differentialquotienten, die wir in den genannten Fällen benutzten, haben wir alsdann allgemein auf

*) Vgl. Formel 39 des Anhangs.

solche einfache Funktionen übertragen, die bei denjenigen naturwissenschaftlichen Problemen auftreten können, welche im Rahmen des vorliegenden Lehrbuches zur Erörterung gelangen. Die von uns behandelten Beispiele zeigen, dass auch für diese Funktionen die Differentialquotienten stets eine einfache und häufig auch naturwissenschaftlich leicht zu begründende Bedeutung besitzen.

Wir wollen jedoch an dieser Stelle in aller Kürze bemerken, dass sich für gewisse Funktionen der reinen Mathematik, sowie bei einzelnen Anwendungen Ausnahmeerscheinungen einstellen können. Auf einige von ihnen wollen wir etwas ausführlicher hinweisen, zumal da ihr Auftreten schon bei einfacheren Problemen möglich sein kann.

Wir sind in der Einleitung von der Anschauung ausgegangen, dass wir die Naturprozesse in elementare Einzelprozesse auflösen. Denken wir uns, um die Begriffe zu fixieren, eine Bewegung; von ihr wissen wir, dass der Zuwachs des durchlaufenen Weges während der Zeit dt um so kleiner wird, je kleiner wir uns das Zeitintervall dt vorstellen, oder in anderer Ausdrucksweise, dass dieser Zuwachs gegen Null konvergiert, wenn der Zuwachs der Zeit gegen Null konvergiert. Fassen wir den durchlaufenen Weg s als Funktion der Zeit t auf, so ändert sich demgemäss die Funktion nur um ausserordentlich wenig, wenn die Zeit um sehr wenig zunimmt. Eine solche Funktion nennt man eine stetige Funktion. Es bedarf kaum des Hinweises, dass der Verlauf der in der Natur vorkommenden Prozesse im allgemeinen durch stetige Funktionen dargestellt wird, mag es sich um Bewegungen, um physikalische Erscheinungen oder um chemische Reaktionen handeln. (Natura non facit saltus!)

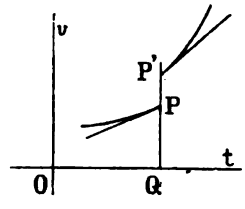


Fig. 37.

Immerhin jedoch werden wir bei der mathematischen Naturbetrachtung zuweilen doch auf Unstetigkeiten im Verlauf einer Funktion geführt und so wollen wir an zwei einfachen Beispielen uns diesen Begriff zu erläutern suchen.

Betrachten wir zuerst die Ausdehnung eines festen Körpers durch Temperatursteigerung und tragen wir uns zu diesem Ende das Volum eines Grammes desselben in seiner Abhängigkeit von der Temperatur graphisch auf. Der feste Körper dehnt sich anfänglich sehr langsam aus (Fig. 37); sobald aber die Temperatur nur um einen noch so geringfügigen Betrag über seinen Schmelzpunkt gestiegen ist, schmilzt er und die an seine Stelle tretende Flüssigkeit besitzt ein erheblich ver-

schiedenes (in der Regel grösseres) Volum. Gehen wir zu höheren Temperaturen über, so ändert sich das Volum fernerhin kontinuierlich und zwar findet in der Regel eine beschleunigte Ausdehnung statt.

Man sagt nun von einer Kurve, die durch die Gleichung

$$v = f(t)$$

gegeben ist und sich nach Art der oben gezeichneten Kurve verhält, sie sei für den Wert $t = OQ$ unstetig und habe an dieser Stelle einen Sprung, und das gleiche sagt man von der Funktion $f(t)$ selber. Lassen wir $f(t)$ an dem Punkte OQ um eine beliebig kleine Grösse dt zunehmen, so ändert sich die Funktion selber nicht, wie in allen bisher betrachteten Fällen, ebenfalls nur um eine sehr kleine Grösse, sondern stets um das endliche Stück PP', so klein wir dt auch wählen. Der Differentialquotient hat an der Stelle $t = OQ$ offenbar zwei verschiedene Werte, die durch die Lage der (Fig. 37 mitgezeichneten) Tangenten bestimmt sind, welche wir im Punkte P und im Punkte P' an die beiden Kurvenstücke zu legen vermögen, und deren physikalische Bedeutung einfach darin besteht, dass sie den Ausdehnungskoefficienten des festen und denjenigen des geschmolzenen Körpers beim Schmelzpunkt darstellen.

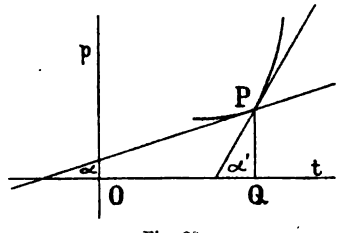


Fig. 38.

In anderen Fällen verlaufen Kurven zwar ohne Sprünge, erfahren aber in einem Punkte eine plötzliche Richtungsänderung; an dieser Stelle hat, mit anderen Worten, der Differentialquotient einen Sprung. Hierfür bietet die Dampfdruckkurve einer Substanz ein gutes Beispiel. Der Dampfdruck p des festen Körpers steigt mit der Temperatur allmählich an; sobald aber der Schmelzpunkt erreicht wird und der Körper demgemäss den flüssigen Aggregatzustand annimmt, so findet plötzlich ein beschleunigtes Ansteigen statt und die Dampfdruckkurve erfährt infolge davon eine plötzliche Richtungsänderung in diesem Punkte, wie es Fig. 38 graphisch veranschaulicht. Der Dampfdruck selber erfährt keinen Sprung beim Schmelzpunkt; denn sein Wert ist daselbst für den festen Körper der gleiche, wie für die auf die Temperatur des Schmelzpunktes gebrachte Flüssigkeit. Wohl aber wird der Differentialquotient unstetig; denn er geht, wenn wir von $t = OQ$ aus um ein noch so kleines Stück dt vorwärts gehen, aus dem Werte, welcher der trigonometrischen Tangente des Winkels α entspricht, in denjenigen über, welcher der trigonometrischen Tangente des Winkels α' entspricht und von dem ersteren um einen endlichen Betrag verschieden ist.

Man sagt von einer Funktion auch dann, dass sie für einen bestimmten Wert von x unstetig ist, wenn sie für diesen Wert unendlich wird. Eine solche Funktion ist z. B.

$$y = \frac{1}{a - x}.$$

Setzen wir $x = a$, so wird y unendlich gross; die Funktion ist daher an dieser Stelle unstetig. Der Differentialquotient dieser Funktion hat den Wert

$$y' = \frac{1}{(a - x)^2},$$

er wird daher für $x = a$ ebenfalls unendlich gross. Solche Funktionen haben wir in den vorstehenden Paragraphen mehrfach kennen gelernt, wir brauchen z. B. nur die Kurvenbilder daraufhin zu betrachten, ob sie Kurvenzüge enthalten, bei denen die Ordinate für einen endlichen Wert von x unendlich wird. Solche Kurven sind z. B. diejenigen, die sich für $\ln x$, für die graphische Darstellung des Boyle-Mariotteschen Gesetzes (S. 2) ergeben, und andere.

Wir schliessen diese Erörterungen mit der Bemerkung, dass wir auch im Nachfolgenden, genau wie im Vorhergehenden, auf die Ausnahmewerte u. s. w. keinerlei Rücksicht nehmen; in allen den von uns zu behandelnden Aufgaben sind wir auf Grund der einfachen Natur der Funktionen, mit denen wir zu operieren haben, dessen überhoben.

Viertes Kapitel.

Die Integralrechnung.

§ 1. Die Aufgabe der Integralrechnung.

In Kapitel II haben wir gesehen, dass uns beim theoretischen Studium der Naturvorgänge und ihrer Gesetze im wesentlichen zwei verschiedene Probleme entgegentreten. Das eine verlangt, aus den Thatsachen, die eine einzelne Phase eines Naturprozesses betreffen, das Gesetz des ganzen Prozesses abzuleiten; das andere nimmt das Gesamtgesetz eines Naturprozesses als gegeben an und stellt die Aufgabe, zu ermitteln, wie sich in jedem einzelnen Augenblick der Naturvorgang abspielt und was ihn wirkend bestimmt. Jedes der beiden Probleme steht dem andern als seine Umkehrung gegenüber. Das Problem, für die ihrer Gesamtnatur nach bekannten Erscheinungen die momentanen Eigenschaften zu ermitteln, führte uns auf die Begriffe und Methoden der Differentialrechnung; es fragt sich jetzt, wie wir die Aufgaben lösen, die den Gegenstand der umgekehrten Probleme bilden.

Wir legen zunächst wieder diejenige Auffassung zu Grunde, die wir den Naturvorgängen gegenüber bisher stets benutzt haben. Wir denken uns den Naturvorgang in lauter kleine Einzelprozesse von minimaler Dauer zerlegt, und nehmen an, dass diese gleichmässig ablaufen. Dabei haben wir nur darauf zu achten, dass wir uns von der Art und der Natur derartiger, sich gleichmässig abspielender Prozesse eine richtige Vorstellung bilden.

Es ist nützlich, in dieser Hinsicht einige Beispiele genauer zu erörtern. Handelt es sich um eine Bewegung mit veränderlicher Geschwindigkeit, so zerlegen wir sie in lauter sehr kurze Bewegungen, von denen wir annehmen, dass ihnen eine gleichmässige Geschwindigkeit eigen ist. Haben wir es mit einer chemischen Reaktion zu thun, die mit unaufhörlich wechselnder Geschwindigkeit abläuft, so zerlegen wir sie

in lauter Einzelreaktionen, deren Geschwindigkeit konstant ist. Wollen wir die veränderliche Abnahme des Luftdrucks mit der Höhe untersuchen, so zerlegen wir die Atmosphäre in lauter sehr dünne Schichten und nehmen an, dass innerhalb einer jeden solchen Schicht der Luftdruck gleichmässig abnimmt. Soll die Wirkung einer mit der Zeit veränderlichen Kraft auf einen Punkt gefunden werden, so ersetzen wir sie durch lauter Kräfte, die eine kleine Zeit hindurch eine konstante Wirkung auf den Punkt ausüben u. s. w. u. s. w. In allen diesen Fällen muss uns aber, falls wir von dieser Auffassung einen wirklichen Vorteil ziehen sollen, dasjenige Gesetz bekannt sein, das die bezüglichen gleichmässigen Prozesse betrifft; nämlich die Grösse der Geschwindigkeit für jeden Bewegungsaugenblick, die Stärke der chemischen Reaktion für jede Phase des chemischen Prozesses, die Abnahme des Luftdruckes für jede Höhe der Atmosphäre, die Intensität der Kraft für jeden Moment ihres Wirkens u. s. w. Hiervon müssen wir eine klare Kenntnis besitzen; die Gesetze, die hier in Frage kommen, müssen uns in voller Exaktheit zu Gebote stehen.

Wir wollen das mathematische Verfahren, nach dem wir die genannten Probleme behandeln, zunächst an dem der Vorstellung leicht zugänglichen Beispiel der Fallbewegung deutlich machen. Wir denken uns die umgekehrte Aufgabe gestellt, wie die, die wir S. 45 behandelt haben, d. h. wir nehmen an, dass in jedem Augenblick der Wert von v durch die Gleichung

$$1) \quad v = gt$$

gegeben ist, und verlangen, daraus die Fallformel

$$2) \quad s = \frac{1}{2} g t^2$$

abzuleiten.

Es ist klar, dass wir davon auszugehen haben, dass v der Differentialquotient von s nach t ist, also die Gleichung

$$3) \quad v = \frac{ds}{dt},$$

also auch

$$4) \quad ds = v\,dt$$

besteht. Wir wollen aber, um im Hinblick auf andere Aufgaben die allgemeine Natur des Verfahrens zu kennzeichnen, etwas ausführlicher vorgehen. Erinnern wir uns, wie wir in der Differentialrechnung zu der Formel 1) gelangten. Wir operierten zunächst mit einem Hilfspunkt, der sich in der Zeit Δt gleichmässig bewegt und während

dessen die Strecke Δs zurücklegt. Ist V seine Geschwindigkeit, so besteht demgemäss die Gleichung

$$5) \quad \Delta s = V \Delta t,$$

oder auch

$$6) \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = V.$$

Nun gingen wir zur Grenze über, dabei verwandelt sich V in v, während

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ in } \frac{ds}{dt}$$

übergeht, und erhielten auf diese Weise die Gleichungen

$$ds = v\,dt, \quad \frac{ds}{dt} = v.$$

Diese Entwicklung kann man sich bedeutend verkürzen. Da es sich doch nur darum handelt, die beiden letzten Gleichungen aufzustellen, so kann man sich die Einführung eines Hilfspunktes ganz ersparen und sofort mit den Differentialen ds und dt operieren; alsdann gestaltet sich die Rechnung einfach folgendermassen.

Der fallende Punkt bewegt sich während der Zeit dt mit der Geschwindigkeit $v = gt$. Ist dann ds die von ihm in dieser Zeit durchlaufene Wegstrecke, so ist

$$ds = v\,dt = gt\,dt,$$

woraus sofort durch Division mit dt

$$7) \quad \frac{ds}{dt} = gt$$

folgt. Augenscheinlich ist das Verfahren selbst nur angenähert richtig, denn weder bewegt sich der fallende Punkt eine Zeit dt lang gleichmässig, noch ist die von ihm in dieser Zeit durchmessene Wegstrecke gleich dem Differential ds (S. 86); das Endresultat aber — und das ist das wesentliche — ist exakt richtig. Der Grund ist der, dass das Endresultat eine Gleichung ist, die den Differentialquotienten bestimmt. Um zum Differentialquotienten zu gelangen, müssen wir aber gerade V in v und Δs in das Differential ds übergehen lassen; es ist daher eine rationelle Vereinfachung, wenn wir — und darauf läuft die infinitesimale Methode hinaus — von vornherein mit v und ds operieren.

Mit der Aufstellung der Gleichung 7) ist der spezifisch physikalische Teil der Betrachtung abgeschlossen. Um von der Gleichung 7) zur Gleichung 2) zu gelangen, haben wir nur noch eine rein rechnerische Aufgabe zu behandeln, nämlich die Frage, wie sich die Funktion s darstellt, wenn wir den Wert ihres Differential

quotienten kennen. Dies ist die Umkehrung derjenigen, die wir in den beiden vorstehenden Kapiteln behandelt haben. Dort haben wir zu den einzelnen Funktionen ihre Differentialquotienten bestimmt; hier sollen wir die Funktion finden, wenn ihr Differentialquotient gegeben ist; wir sollen im besondern zeigen, dass die Funktion $s = \frac{1}{2} g t^2$ ist, wenn wir wissen, dass ihr Differentialquotient gleich gt ist.

Ein zweites Beispiel sei die Zuckerinversion (Zerfall gelösten Rohrzuckers unter Aufnahme von Wasser in Dextrose und Lävulose bei Gegenwart von Säuren). Ehe wir an die Behandlung dieser Aufgabe gehen, haben wir den Begriff der Reaktionsgeschwindigkeit zu definieren. Denken wir uns der Zuckerlösung in jedem Augenblick soviel Zucker zugeführt, als durch Inversion verschwindet, so wird in jeder Sekunde die gleiche Zuckermenge sich umwandeln, d. h. die Reaktion geht mit konstanter Geschwindigkeit vor sich. Von einem derartigen gleichmässig verlaufenden Inversionsprozess besagt das Guldberg-Waage'sche Gesetz, dass die in der Zeiteinheit invertierte Zuckermenge der in Lösung befindlichen Zuckermenge direkt proportional ist.

Sei nun a die ursprünglich in der Lösung befindliche Zuckermenge, ferner sei zur Zeit t die Zuckermenge x invertiert, sodass die Menge des noch in Lösung befindlichen Zuckers $a - x$ beträgt. In der alsdann folgenden Zeit dt werde die Zuckermenge dx invertiert, und zwar unseren Grundvorstellungen zufolge in einem gleichmässig verlaufenden Reaktionsprozess. Für ihn ist nach obigem Gesetz die Reaktionsgeschwindigkeit der vorhandenen Zuckermenge proportional; bezeichnen wir sie für die Einheit der Zuckermenge durch k, so ist sie für die Zuckermenge $a - x$ gleich $k(a - x)$.*) Mit dieser Reaktionsgeschwindigkeit geht aber die Inversion nur die kleine Zeit dt hindurch vor sich, in dieser Zeit beträgt daher die Menge des invertierten Zuckers $k(a - x)\,dt$. Diese Zuckermenge haben wir andrerseits mit dx bezeichnet, also ergiebt sich sofort

$$8) \quad dx = k(a - x)\,dt$$

oder

$$9) \quad \frac{dx}{dt} = k(a - x).$$

Das chemische Gesetz ist damit in eine mathematische Form gebracht, und wir haben nun noch die Aufgabe zu lösen, dasjenige Funktionsverhältnis zwischen x und t zu ermitteln, das in vorstehender Gleichung seinen Ausdruck findet.

*) Es giebt also $k(a - x)$ die in der Zeiteinheit invertierte Zuckermenge an.

Hierzu schreiben wir die letzte Gleichung in die Form

$$10) \quad dt = \frac{1}{k} \cdot \frac{dx}{a-x}$$

und sehen leicht, dass man

$$11) \quad t = -\frac{1}{k} \lg (a-x)$$

setzen darf.*) In der That folgt aus dieser Gleichung durch Differentiation

$$dt = -\frac{1}{k} d \lg (a-x) = -\frac{1}{k} \frac{d(a-x)}{a-x} = \frac{1}{k} \frac{dx}{a-x}.$$

Damit haben wir die gesuchte funktionale Beziehung zwischen x und t gefunden. Wir können die Gleichung 11) einfacher folgendermassen schreiben**)

$$12) \quad t = \frac{1}{k} \lg \frac{1}{a-x}.$$

Den Differentialquotienten $\frac{dx}{dt}$ bezeichnet man als die momentane Reaktionsgeschwindigkeit des Prozesses. Diese Bezeichnung ist dem Begriff der momentanen Bewegungsgeschwindigkeit durchaus analog. Letztere ist ja für ungleichförmige Bewegungen das Verhältnis zwischen dem Differential ds und dem Differential dt; jener entspricht bei dem ungleichförmigen Inversionsprozess das Verhältnis zwischen dem Differential dx, den das invertierte Quantum in der Zeit dt erfährt, und der Zeit dt selbst.

§ 2. Der Integralbegriff.

Die vorstehend behandelten Probleme führen durchgehends auf die rechnerische Aufgabe, eine Funktion zu bestimmen, wenn man den Wert ihres Differentialquotienten kennt. Diese Aufgabe ist die genaue Umkehrung derjenigen, mit der wir es in der Differentialrechnung zu thun hatten; denn dort handelte es sich darum, den Differentialquotienten zu bestimmen, wenn die Funktion gegeben ist. Wir können dies auch folgendermassen präzisieren: In der Differentialrechnung wurden die unendlich kleinen Aenderungen einer veränderlichen Grösse bestimmt, welche unendlich kleinen Aenderungen einer andern Grösse entsprechen; vorausgesetzt, dass man das Gesetz kennt, das beide Grössen verbindet, resp. dass man weiss, welche Funktion die eine von der andern ist. Jetzt haben wir das Problem zu betrachten, wenn die unendlich

*) Die genauere Erörterung befindet sich auf S. 109.

**) Vgl. Formel 24 des Anhangs.

kleinen Aenderungen einer veränderlichen Grösse bekannt sind, die den unendlich kleinen Aenderungen einer zweiten Grösse entsprechen, die Funktionsbeziehung zu suchen, die zwischen den beiden Grössen besteht. An den Naturforscher wird das hier definierte Problem sogar noch öfter herantreten, als dasjenige der Differentialrechnung, weil er nur äusserst selten die exakte Beziehung zwischen zwei veränderlichen Grössen kennt, hingegen sehr häufig auf Grund einer glücklichen Hypothese voraus zu sagen weiss, durch welche Beziehung unendlich kleine Aenderungen jener Grössen mit einander verknüpft sind.

Die Wissenschaft, deren Gegenstand die eben genannte Aufgabe bildet, heisst Integralrechnung; um uns diese Bezeichnung näher zu bringen, können wir daran denken, dass die Probleme, die die Integralrechnung behandelt, die Gesetze finden lehren, die den Gesamtverlauf *(integer)* eines Naturvorgangs betreffen. Die Integralrechnung steht nach dem obigen der Differentialrechnung ebenso gegenüber, wie die Subtraktion der Addition, die Division der Multiplikation oder die Radizierung der Potenzierung. In der Differentialrechnung besassen wir ein allgemeines Schema, nach dem wir den Differentialquotienten einer jeden Funktion zu bilden hatten; es fragt sich naturgemäss, ob auch für die Integralrechnung ein solches Schema allgemeiner Natur existieren mag. Wir haben zu antworten, dass dies nicht der Fall ist.

Als allgemeine Aufgabe, die hier auftritt, fanden wir die, eine Funktion zu bestimmen, deren Differentialquotient gegeben ist. Ist z. B. x^n dieser Differentialquotient, und bezeichnen wir für den Augenblick die gesuchte Funktion durch y, so soll

$$\frac{dy}{dx} = x^n,$$
$$dy = x^n\,dx$$

sein. Bezeichnen wir allgemein den Differentialquotienten durch $f(x)$ und die gesuchte Funktion durch $F(x)$, so ist $F(x)$ danach zu bestimmen, dass

$$1)\quad \frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

$$2)\quad dF(x) = f(x)\,dx$$

ist, dass also das Differential von $F(x)$ gleich $f(x)\,dx$ ist.

Eine Funktion $F(x)$, die dieser Gleichung genügt, bezeichnen wir durch

$$3)\quad F(x) = \int f(x)\,dx;^*)$$

*) Den Ursprung und die Bedeutung dieses Zeichens werden wir später genauer

und nennen sie das Integral von $f(x)\,dx$ oder auch Integralfunktion von $f(x)$. Mit Anwendung dieser Bezeichnung erhalten wir für die in § 1 betrachteten Beispiele, dass resp.

$$s = \int g t\,dt = \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$t = \int \frac{1}{k} \frac{dx}{a - x} = \frac{1}{k} \lg \frac{1}{a - x}$$

zu setzen ist. Diese Beispiele lehren zugleich, welches der Wert der in ihnen auftretenden Integrale ist.

Die Frage, die sich hier unmittelbar erhebt, ist die, wie wir allgemein zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ die Integralfunktion $F(x)$ bestimmen können. Diese Frage werden wir im nächsten Paragraphen in Angriff nehmen; zuvor wollen wir noch zeigen, dass auch die Bezeichnungen in Evidenz setzen, dass Differentialrechnung und Integralrechnung sich aufhebende Operationen sind.

Nach der obigen Festsetzung verstehen wir unter $F(x)$, resp. $\int f(x)\,dx$ eine Funktion, deren Differential den Wert $f(x)\,dx$ hat, für die also die Gleichung 2) besteht. Setzen wir in sie für $F(x)$ aus Gleichung 3) seinen Wert, so folgt

$$4) \quad d \int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Diese Gleichung zeigt in der That, dass die Zeichen d und $\int$ einander aufheben, genau wie dies für die Operationszeichen des Potenzierens und Radizierens der Fall ist.*)

In der nämlichen Weise erhalten wir aus der Gleichung 3), wenn wir für $f(x)\,dx$ nach Gleichung 2) $dF(x)$ setzen und die Seiten der Gleichung vertauschen,

$$5) \quad \int dF(x) = F(x)$$

und auch diese Gleichung zeigt, dass sich d und $\int$ gegenseitig aufheben.**) Ersetzen wir zur Abkürzung $F(x)$ durch u, so nimmt sie die

---

erörtern. Hier genüge die Bemerkung, dass einerseits jede Bezeichnung willkürlich gewählt werden kann und dass andrerseits das Zeichen $\int$ ein langgezogenes s darstellt, und eine Summe, resp. Gesamtheit bedeutet — hier tritt die Beziehung zu den Gesamtgesetzen zu Tage —, genau wie z. B. das Zeichen $\sqrt{\ }$, das die Quadratwurzel ausdrückt, an ein r (radix) erinnern soll.

*) Vgl. die folgende Anmerkung.

**) Für je zwei inverse Rechnungsarten existieren zwei derartige Gleichungen. Lassen wir dem Potenzieren das Differenzieren, also dem Radizieren das Integrieren entsprechen, so ist das Analogon der ersten Gleichung, dass

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

einfache Form

$$6) \quad \int du = u$$

an; eine Gleichung, von der wir sehr oft Gebrauch zu machen haben.

Wollen wir die letzten Gleichungen in Worte fassen, so können wir sagen, dass das Differential eines Integrals, ebenso das Integral eines Differentials immer wieder die ursprüngliche Funktion giebt; genau so wie die n-te Wurzel einer n-ten Potenz, resp. die n-te Potenz einer n-ten Wurzel immer die Grundzahl giebt.

Ehe wir die Integrale der einzelnen Funktionen $f(x)$ angeben, wollen wir noch einen allgemeinen Satz ableiten. Ist $F(x)$ wieder eine Integralfunktion von $f(x)$, so dass es der Gleichung

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

genügt, so sieht man sofort, dass auch

$$7) \quad F(x) + C,$$

wo C irgend eine Konstante bedeutet, diese Eigenschaft hat; denn es ist (S. 68)

$$\frac{d[F(x) + C]}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Die Funktion $F(x) + C$ ist daher ebenfalls als eine Integralfunktion von $f(x)$ zu betrachten; mit anderen Worten, es giebt zu einer Funktion $f(x)$ unendlich viele Integralfunktionen. Jeder Wert von C bestimmt eine von ihnen; sie gehen aus einander hervor, indem man zu einer beliebigen von ihnen konstante Grössen hinzuaddiert.

Man drückt dies formal dadurch aus, dass man

$$8) \quad \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

schreibt. Ohne befürchten zu müssen, zu Irrtümern Veranlassung zu geben, werden wir aber auch in Zukunft von den bisher benutzten Gleichungen

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

vielfach Gebrauch machen. Wollen wir beide Gleichungen genau lesen, so heisst die zweite: Eine Integralfunktion von $f(x)$ ist $F(x)$; die erste: Alle Funktionen von der Form $F(x) + C$ sind Integralfunktionen.

---

ist; hier wird a zuerst radiziert und dann das Ergebnis potenziert. Das Analogon der zweiten Gleichung dagegen lautet

$$\sqrt[n]{(a^n)} = a;$$

hier wird a zuerst potenziert und dann das Ergebnis wieder radiziert. Ebenso wird im Text im ersten Fall zuerst $f(x)\,dx$ integriert und dann differenziert, im zweiten zunächst $F(x)$ differenziert und dann das Ergebnis integriert.

§ 3. Die Grundformeln der Integralrechnung.

Da die Integralrechnung die Umkehrung der Differentialrechnung ist, so können wir, wie dies für alle solche Rechnungsarten gilt, jede Formel der Differentialrechnung benützen, um aus ihr eine Formel der Integralrechnung abzuleiten.

Wir haben nur davon Anwendung zu machen, dass nach vorigem Paragraphen, wenn die Gleichung

$$dF(x) = f(x)\,dx$$

besteht, diese Gleichung sofort

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

ergiebt. Man sagt, dass die zweite Gleichung aus der ersten durch Integration hervorgeht, wie ebenso umgekehrt die erste aus der zweiten durch Differentiation.

Wir erhalten also die gesuchten Integralformeln durch unmittelbare Umkehrung derjenigen, die wir in § 11 des vorigen Kapitels (S. 85) aufgestellt haben. Einige von ihnen wollen wir vorher ein wenig umformen. Nämlich für die Potenz x^{n+1}*) besteht die Gleichung

$$d(x^{n+1}) = (n+1)\,x^n\,dx,$$

woraus sich noch

$$d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n\,dx$$

ergiebt. Ferner setzen wir statt der Formeln

$$d\cos x = -\sin x\,dx, \quad d\operatorname{ctg} x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$$

die folgenden

$$d(-\cos x) = \sin x\,dx; \quad d(-\operatorname{ctg} x) = \frac{dx}{\sin^2 x}$$

und gelangen nunmehr sofort zu folgender Tabelle von Integralen

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x; \quad \int \sin x\,dx = -\cos x,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x; \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x,$$

$$\int e^x\,dx = e^x; \quad \int \frac{dx}{x} = \ln x^*),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sin} x,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x.$$

*) Das Integral der linken Seite ist formal in dem ersten Integral der Tabelle

§ 4. Die geometrische und physikalische Bedeutung der Integrationskonstanten.

In der Existenz der unendlich vielen Integralfunktionen, die zu einem und demselben Differential $f(x)\,dx$ gehören, tritt uns eine Thatsache entgegen, für die es im Bereich der Elementarmathematik ein vollständiges Analogon nicht giebt. Die Bestimmung der Quadratwurzel einer Zahl führt allerdings auf zwei Lösungen, ebenso hat eine dritte Wurzel drei verschiedene Werte; aber unendlich viele Lösungen, wie sie sich hier bei der Aufgabe ergeben, zum Differential $f(x)\,dx$ die Integralfunktion zu finden, treten sonst nirgends auf. Die formale Erklärung hiervon haben wir im vorigen Paragraphen dargelegt, wir haben aber naturgemäss den Wunsch, zu erfahren, in welchen geometrischen resp. naturwissenschaftlichen Thatsachen dies begründet ist. Wir wollen mit der geometrischen Interpretation den Anfang machen.

Es sei $F(x)$ zunächst wieder irgend eine Integralfunktion von $f(x)$, so dass also die Gleichung

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

besteht. Setzen wir

$$1) \quad y = F(x),$$

so wird durch diese Gleichung in bekannter Weise eine Kurve dargestellt. Für diese Kurve folgt (S. 57)

$$2) \quad \operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

und diese Gleichung bestimmt für unsere Kurve in jedem Kurvenpunkt die Lage der Tangente. Die Bestimmung der Integralfunktion $F(x)$ zu gegebenem $f(x)$ läuft also geometrisch darauf hinaus, die Ordinate y einer Kurve zu bestimmen, wenn man die Tangentenrichtung in jedem ihrer Punkte kennt.

Man überzeugt sich nun sofort, dass die Aufgabe, eine Kurve zu zeichnen, wenn man das Gesetz ihrer Tangente kennt, auf unzählig viele Kurven führt. Beachten wir, dass die Bestimmung der Tangente auf Grund von Gleichung 2) eine solche ist, dass der Winkel τ in jedem Punkt der Kurve nur von der Abscisse x des Kurvenpunktes abhängt. Ist dann irgend eine Kurve bekannt, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, und verschiebt man sie parallel mit sich selbst in der Richtung der y-Axe um irgend eine Strecke, so wird die Kurve in ihrer neuen

---

enthalten, nämlich für $n = -1$. Alsdann versagt aber die erste Integralformel, da $n+1=0$ wird, und ist durch die obige zu ersetzen.

Lage ebenfalls den Bedingungen des Problems genügen. Ist nämlich (Fig. 39) A ein Punkt, der dadurch in die Lage B gelangt, so haben erstens A und B gleiche Abscisse, andererseits bleibt jede Tangente bei dieser Verschiebung sich selbst parallel, woraus die Behauptung unmittelbar hervorgeht.

Wir können das nämliche auf folgende Weise erhärten, die uns zugleich ein Mittel an die Hand giebt, die bezüglichen Kurven wirklich zu zeichnen, wenn die Gl. 2) gegeben ist, und auf diese Weise die gesuchte Integralfunktion graphisch zu bestimmen. Wir gehen wieder davon aus, dass wir jede geometrische Kurve mit hinreichender Genauigkeit durch ein ihr eingeschriebenes Polygon und die Tangentenrichtung durch die Richtung der Polygonseiten ersetzen können. Nun sei (Fig. 39) A_1 ein beliebiger Punkt der Ebene, dessen Koordinaten x_1 y_1 seien. Wir berechnen einen Winkel τ_1 aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \tau_1 = f(x_1)$$

und ziehen unter diesem Winkel durch A_1 eine Gerade. Auf ihr nehmen wir nahe bei A_1 einen Punkt A_2 an, dessen Abscisse x_2 sei*), und berechnen einen Winkel τ_2 aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \tau_2 = f(x_2).$$

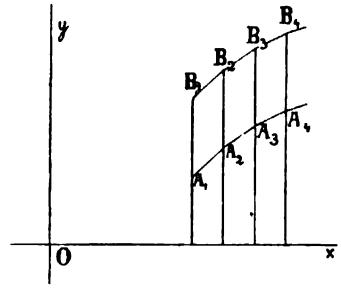


Fig. 39.

Jetzt ziehen wir durch A_2 eine Gerade unter dem Winkel τ_2, nehmen auf ihr nahe bei A_2 den Punkt A_3 mit der Abscisse x_3 an, bestimmen den Winkel τ_3, für den

$$\operatorname{tg} \tau_3 = f(x_3)$$

ist, u. s. w. u. s. w., so erhalten wir einen Linienzug $A_1 A_2 A_3 \ldots$, dessen Seiten mit der x-Axe die nämlichen Winkel bilden, wie die Tangenten der gesuchten Kurve. Je näher die Punkte A_1, A_2, $A_3 \ldots$ einander rücken, je näher kommt das Polygon der Kurve, es geht in der Grenze in die Kurve selbst über. Damit haben wir eine Kurve (a), die der Gl. 2) entspricht, wirklich gezeichnet.

Es ist nun von vornherein klar, dass den unzählig vielen Integralfunktionen unzählig viele Kurven entsprechen werden, es fragt sich nur, wie wir zu ihnen gelangen. Erinnern wir uns, dass wir den Ausgangspunkt A_1 unserer Konstruktion beliebig angenommen haben, d. h. also den Wert y_1, der zur Abscisse x_1 gehört. Ersetzen wir diesen Wert y_1 durch einen andern, Y_1, der dem Punkt B_1 entspricht, so können wir

*) Am einfachsten ist es, die Abscissen $x_1, x_2, x_3 \ldots$ so zu wählen, dass $x_2 - x_1 = x_3 - x_2$ u. s. w., z. B. $x_1 = 5$, $x_2 = 5,1$, $x_3 = 5,2$ u. s. w.

dazu in der gleichen Weise einen Polygonzug $B_1 B_2 B_3 \ldots$ zeichnen, also auch eine Kurve (b), die einer Integralfunktion entspricht. Wir gelangen somit zu unendlich vielen Kurven und haben hiermit die geometrische Erklärung für die Existenz der unendlich vielen Integralfunktionen bereits gewonnen. Beachten wir nun, dass in den Gleichungen für $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \ldots$ nur die Abscissen $x_1, x_2, x_3 \ldots$ auftreten, so sehen wir sofort, dass sich für die Winkel in entsprechenden Punkten von (a) und (b) gleicher Werte ergeben, also die Seiten $B_1 B_2$, $B_2 B_3$, $B_3 B_4 \ldots$ den Seiten $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4 \ldots$ parallel laufen. Es ist daher auch

$$3) \quad A_1 B_1 = A_2 B_2 = A_3 B_3 = \ldots\ldots,$$

d. h. es sind die Differenzen

$$Y_1 - y_1 = Y_2 - y_2 = Y_3 - y_3 = \ldots.$$

und wenn wir den konstanten Wert dieser Differenz wieder mit C bezeichnen, so ergiebt sich schliesslich

$$Y_1 = y_1 + C, \quad Y_2 = y_2 + C, \quad Y_3 = y_3 + C \ldots.,$$

d. h. es besteht allgemein für variables y und Y die Gleichung

$$4) \quad Y = y + C.$$

Schreiben wir nun noch die Gleichungen der ersten Kurve in die Form

$$5) \quad y = F(x),$$

so folgt als Gleichung der zweiten Kurve

$$6) \quad Y = F(x) + C$$

und das ist die zu erläuternde Gleichung.*)

Wir ziehen hieraus noch die Folgerung, dass man, um aus der Gesamtheit aller Integralfunktionen eine bestimmte herauszuheben, zu irgend einem Wert von x den zugehörigen Wert der Funktion beliebig vorschreiben darf.

Um die physikalische Bedeutung der Konstanten C zu erkennen und die Notwendigkeit ihres Auftretens zu verstehen, ist es das zweckmässigste, einige bestimmte Beispiele durchzurechnen. Wir beginnen wieder mit der Fallbewegung. Für sie gilt das Gesetz, dass die durch die Anziehung der Erde hervorgerufene Beschleunigung der Bewegung bei der Masse 1 die Grösse g hat. Unter der Beschleunigung einer gleichmässig beschleunigten Bewegung versteht man den Geschwindigkeitszuwachs in der Zeiteinheit, resp. einer Sekunde; wie aus S. 51 folgt, ist daher die Beschleunigung einer beliebigen geradlinigen Bewegung dem Differentialquotienten der Geschwindigkeit v gleich**), d. h. es ist

*) Aus obiger Betrachtung folgt noch, dass jede Integralfunktion aus $F(x)$ durch Addition einer Konstante entsteht; auf S. 103 haben wir genau genommen nur bewiesen, dass alle Funktionen $F(x) + C$ Integralfunktionen sind.

**) Vgl. auch Kapitel VII, § 3.

$$7) \quad \frac{dv}{dt} = g$$

oder aber

$$dv = g\,dt.$$

Hieraus folgt

$$8) \quad v = \int g\,dt + C.$$

Beachten wir nun, dass (S. 101) aus der Gleichung

$$d(gt) = g\,dt$$

die Gleichung

$$gt = \int g\,dt$$

folgt, so erhalten wir schliesslich

$$9) \quad v = gt + C.$$

Wir haben die Fallbewegung auf S. 45 bereits vom umgekehrten Standpunkt aus behandelt, und hatten dort als Wert der Geschwindigkeit $v = gt$ erhalten. Aber der dort behandelte Fall betraf nur diejenige Bewegung, bei der sich der fallende Punkt im Anfang der Bewegung, d. h. im Augenblick $t = 0$ in der Ruhelage befindet. Allein die Gesetze des freien Falls umfassen auch diejenigen Bewegungen, bei denen der bezügliche Punkt im Augenblick, wo die Schwere zu wirken anfängt, schon eigene Geschwindigkeit besitzt, die sowohl nach oben als nach unten gerichtet sein kann. Alle diese Bewegungen sind durch das gleiche Gesetz definiert, dass die vertikal zur Erde gemessene Beschleunigung den Wert g besitzt; sie alle müssen daher den obigen Formeln unterworfen sein.

Um irgend eine dieser Bewegungen herauszuheben, müssen wir wissen, welchen Wert für sie v in irgend einem Augenblick besitzt. Hierzu können wir zweckmässig den Moment $t = 0$ nehmen, denn es ist ja gerade die Anfangsgeschwindigkeit, die meist gegeben ist. Diese Anfangsgeschwindigkeit sei v_0, so folgt aus 9) die Gleichung

$$10) \quad v_0 = C,$$

für diese bestimmte Bewegung folgt also

$$11) \quad v = gt + v_0$$

als Gleichung, die die Geschwindigkeit v in jedem Augenblick t bestimmt.

Wird der Körper senkrecht in die Höhe geworfen, so ist seine Anfangsgeschwindigkeit negativ; wir setzen

$$v_0 = -V,$$

wo V jetzt positiv ist, so dass die Gleichung

$$v = gt - V$$

besteht. Man kann dann fragen, nach welcher Zeit der Körper zum Stillstand kommt, resp. seine Bewegungsrichtung ändert. Dies tritt

dann ein, wenn v den Wert Null erlangt; der zugehörige Wert von t ergiebt sich daher aus der Gleichung

$$0 = gt - V$$

in der Form

$$12) \quad t = \frac{V}{g}.$$

An zweiter Stelle wollen wir die Zuckerinversion behandeln. Wir hatten als die bezügliche Gleichung zunächst

$$13) \quad dt = \frac{1}{k} \frac{dx}{a - x}$$

gefunden, woraus durch Integration unter Zufügung der Konstanten C

$$14) \quad t = \frac{1}{k} \ln \frac{1}{a - x} + C$$

folgt. Bei einem bestimmten Reaktionsprozess muss C naturgemäss einen bestimmten Wert besitzen. Diesen Wert kann man folgendermassen bestimmen. Zählt man, wie gewöhnlich, die Zeit von dem Augenblick an, wo die Reaktion beginnt, so hat zur Zeit $t = 0$ die invertierte Zuckermenge den Wert $x = 0$, es besteht daher die Gleichung

$$0 = \frac{1}{k} \ln \frac{1}{a} + C.$$

Durch sie ist C bestimmt. Setzen wir diesen Wert von C in die Gleichung 14) ein, so ergiebt sich

$$15) \quad \begin{aligned} t &= \frac{1}{k} \ln \frac{1}{a - x} - \frac{1}{k} \ln \frac{1}{a} \\ &= \frac{1}{k} \ln \frac{a}{a - x}. \text{*)} \end{aligned}$$

Man pflegt übrigens in der Praxis die Konstante C auf andere Weise zu bestimmen. Man beobachtet nämlich die zu irgend einer Zeit t_1 invertierte Zuckermenge x, direkt, alsdann besteht für t_1 und x_1 die Gleichung

$$16) \quad t_1 = \frac{1}{k} \ln \frac{1}{a - x_1} + C,$$

woraus sich C ergiebt. Setzt man den Wert von C in 14) ein, so folgt

$$\begin{aligned} t_1 - t &= \frac{1}{k} \ln \frac{1}{a - x_1} - \frac{1}{k} \ln \frac{1}{a - x} \\ &= \frac{1}{k} \ln \frac{a - x}{a - x_1} \text{*)} \end{aligned}$$

und daraus folgt schliesslich

$$17) \quad k = \frac{1}{t_1 - t} \ln \frac{a - x}{a - x_1}.$$

*) Vgl. Formel 20 und 24 des Anhangs.

Dies ist die Form, in die man unsere Gleichung am besten setzt, wenn man sie experimentell bestätigen will. Nach ihr muss der Ausdruck auf der rechten Seite eine Konstante sein, und man kann, indem man zu irgend welchen Zeiten $t, t', t'' \ldots$ die zugehörigen Werte $x, x', x'' \ldots$ beobachtet, leicht ermitteln, ob dies der Fall ist.*)

§ 5. Integration von Summe und Differenz.

Wir übertragen im folgenden die Ergebnisse von Kapitel II § 5 und 6 auf die Integralfunktionen. Es ist

$$1) \quad d(u+v) = du + dv$$

und hieraus folgt durch Integration

$$u + v = \int (du + dv).$$

Aber es ist $u = \int du$, $v = \int dv$; folglich ergiebt sich

$$2) \quad \int (du + dv) = \int du + \int dv,$$

d. h. das Integral einer Summe ist gleich der Summe der Integrale.

Die gleiche Formel gilt für mehr als zwei Summanden.

In der nämlichen Weise folgt aus der Formel

$$3) \quad d(u - v) = du - dv$$

durch Integration

$$u - v = \int (du - dv)$$

oder, wenn wir wieder $u = \int du$, $v = \int dv$ setzen,

$$4) \quad \int (du - dv) = \int du - \int dv,$$

d. h. das Integral einer Differenz ist gleich der Differenz der bezüglichen Integrale.

Endlich ergiebt sich aus der Formel

$$5) \quad d(au) = a\,du,$$

in der a eine Konstante bedeutet, durch Integration

$$au = \int a\,du.$$

Ersetzen wir hier u durch $\int du$, so folgt

$$6) \quad \int a\,du = a \int du.$$

Diese Formel zeigt, dass man eine Konstante als Faktor beliebig vor oder unter das Integralzeichen setzen kann.

Fassen wir die vorstehenden Sätze zusammen, so folgt

$$\int (a\,du + b\,dv - c\,dw) = a \int du + b \int dv - c \int dw.$$

Beispiele.

$$\int (x + \sin x)\,dx = \int x\,dx + \int \sin x\,dx = \frac{x^2}{2} - \cos x + C$$

*) Vgl. die Anwendungen in Kap. V, § 3, 9, 10.

$$\int (ax^2+bx+c)\,dx = \int ax^2\,dx + \int bx\,dx + \int c\,dx$$
$$= \frac{ax^3}{3} + b\,\frac{x^2}{2} + cx + C$$

$$\int \left(a\,x^2 + \frac{b}{x}\right) dx = \int ax^2\,dx + \int \frac{b}{x}dx = \frac{ax^3}{3} + b\ln x + C$$

$$\int (a\cos x + b\sin x)\,dx = a\sin x - b\cos x + C.$$

§ 6. Die Methode der teilweisen Integration.

Wir wollen nunmehr diejenige Formel, die sich auf die Differentiation eines Produktes bezieht, in die Integralrechnung übertragen. Wir hatten

$$1)\quad d(uv) = v\,du + u\,dv.$$

Nehmen wir auf beiden Seiten das Integral, so erhalten wir links die Funktion uv, rechts die Summe der einzelnen Integrale, d. h. wir finden

$$uv = \int v\,du + \int u\,dv$$

als Umkehrung der analogen Formel der Differentialrechnung. Es fragt sich, wie wir diese Formel benutzen können. Wir schreiben sie zu diesem Zweck

$$2)\quad \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

und sehen nun sofort, dass sie ein Integral auf ein anderes zurückführt und daher als eine Reduktionsformel aufzufassen ist. Kennen wir das Integral der rechten Seite, so können wir mit dessen Hilfe auch das Integral der linken Seite berechnen.

Es handele sich z. B. um das Integral

$$\int \ln x\,dx.$$

Wir setzen, um die Formel zu benutzen,

$$u = \ln x, \quad dv = dx,$$

so finden wir

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = x$$

und demnach

$$3)\quad \int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{dx}{x}$$
$$= x\ln x - x.$$

Ein zweites Beispiel sei das Integral

$$\int x e^x\,dx.$$

Hier setzen wir

$$u = x, \quad dv = e^x\,dx$$

und finden, gemäss S. 104, zunächst

$$du = dx, \quad v = \int e^x dx = e^x.$$

Hieraus folgt weiter

$$4) \quad \begin{aligned} \int x e^x dx &= x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x. \end{aligned}$$

Wie man die Zerlegung in die beiden Teile u und dv zu machen hat, damit die Methode wirklich zum Ziele führt, lässt sich natürlich nicht allgemein angeben. Man ist hier auf Probieren angewiesen. Nur soviel ist klar, dass man erstens im stande sein muss, die Funktion v selbst zu ermitteln, und dass zweitens das Integral, auf das man das gesuchte reduziert, bekannt sein oder doch wenigstens einfacher bestimmbar sein muss, als das gesuchte. Setzen wir z. B. beim letzten Integral

$$u = e^x, \quad dv = x dx$$

— was an und für sich natürlich zulässig ist — so ist v auch jetzt noch sofort bestimmbar; es folgt nämlich

$$du = e^x dx, \quad v = \int x dx = \frac{x^2}{2}$$

und demnach

$$\int x e^x dx = \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x dx.$$

Jetzt haben wir aber das gesuchte Integral augenscheinlich auf ein komplizierteres zurückgeführt; diese Substitution hat daher keinen praktischen Wert für die Auswertung des gesuchten Integrals.

Man nennt die vorstehend angegebene Methode der Integralrechnung die Methode der teilweisen Integration.

Nach ihr kann man z. B. folgende Integrale berechnen, zunächst

$$\int x \sin x \, dx.$$

Man setze

$$u = x, \quad dv = \sin x \, dx,$$

so folgt

$$du = dx, \quad v = \int \sin x \, dx = -\cos x$$

und daraus

$$5) \quad \begin{aligned} \int x \sin x \, dx &= -x \cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \sin x \end{aligned}$$

Ebenso kann man das Integral

$$\int x^2 \sin x \, dx$$

behandeln. Man setze

$$u = x^2, \qquad dv = \sin x \, dx,$$
$$du = 2x \, dx, \quad v = \int \sin x \, dx = -\cos x$$

und findet demgemäss

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x\, dx.$$

Jetzt setze man, um das Integral der rechten Seite zu bestimmen,

$$u = 2x, \quad dv = \cos x\, dx, \text{ also}$$
$$du = 2\, dx, \quad v = \int \cos x\, dx = \sin x$$

und findet

$$\int 2x \cos x\, dx = 2x \sin x - \int 2 \sin x\, dx$$
$$= 2x \sin x + 2 \cos x;$$

im ganzen erhält man also

$$6) \quad \int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x.$$

§ 7. Integration durch Einführung neuer Variabeln.

Man kann sich die Ermittelung der Integralfunktion vielfach dadurch erleichtern, dass man neue Variabele einführt, analog zu dem Verfahren, das wir für die Differentialrechnung (S. 89) auseinandergesetzt haben. Es mag genügen, einige Beispiele zu rechnen.

Es handele sich um das Integral

$$\int (a+x)^n\, dx.$$

Man setze zur Abkürzung

$$a + x = u,$$

so ergiebt sich durch Differentiation

$$dx = du$$

und das obige Integral wird

$$\int (a+x)^n\, dx = \int u^n\, du$$
$$= \frac{u^{n+1}}{n+1},$$

und wenn wir hier für u den obigen Wert setzen, so folgt

$$1) \quad \int (a+x)^n\, dx = \frac{(a+x)^{n+1}}{n+1} + C.^*)$$

Im besondern folgt, dass

$$\int (a+x)\, dx = \frac{(a+x)^2}{2} + C,$$

$$\int (a+x)^2\, dx = \frac{(a+x)^3}{3} + C,$$

*) Die Konstante fügt man am einfachsten erst im Endresultat hinzu.

$$\int \frac{dx}{(a+x)^2} = \int (a+x)^{-2}\,dx = -\frac{1}{a+x} + C,$$
$$\int \frac{dx}{(a+x)^3} = \int (a+x)^{-3}\,dx = -\frac{1}{2(a+x)^2} + C$$

u. s. w. u. s. w.

Analog bestimmt sich das Integral

$$\int (a-x)^n\,dx.$$

Wir setzen zunächst

$$a - x = u, \text{ also } -dx = du,$$

so folgt

$$\int (a-x)^n\,dx = -\int u^n\,du = -\frac{u^{n+1}}{n+1},$$

resp. wenn wir wieder u durch $a-x$ ersetzen,

$$2) \quad \int (a-x)^n\,dx = -\frac{(a-x)^{n+1}}{n+1} + C$$

und hieraus folgt im besondern wieder

$$\int (a-x)\,dx = -\frac{(a-x)^2}{2} + C,$$
$$\int (a-x)^2\,dx = -\frac{(a-x)^3}{3} + C,$$
$$\int \frac{dx}{(a-x)^2} = \int (a-x)^{-2}\,dx = \frac{1}{a-x} + C,$$
$$\int \frac{dx}{(a-x)^3} = \int (a-x)^{-3}\,dx = \frac{1}{2(a-x)^2} + C$$

u. s. w. u. s. w.

Ist $n = -1$, so führen die bezüglichen Integrale nach S. 104 auf Logarithmen. Wir finden z. B., wenn wir in dem Integral

$$\int \frac{dx}{x+a}$$

$$x + a = u, \text{ also } dx = du$$

setzen,

$$3) \quad \int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln(x+a) + C.$$

Soll ferner das Integral

$$\int \frac{A\,dx}{a-x}$$

berechnet werden, so erhalten wir zunächst

$$\int \frac{A\,dx}{a-x} = A \int \frac{dx}{a-x}.$$

Wir setzen nun

$$a - x = u, \text{ also } -dx = du,$$

so erhalten wir

$$A\int\frac{dx}{a-x} = -A\int\frac{du}{u}$$
$$= -A\ln u = A\ln\frac{1}{u},^{*})$$

und wenn wir für u wieder seinen Wert setzen, so folgt schliesslich

$$4)\quad \int\frac{A\,dx}{a-x} = A\ln\frac{1}{a-x} + C.$$

Gerade von diesen Integralen haben wir in den Anwendungen besonders häufig Gebrauch zu machen. Dem letzten Integral sind wir bei der Zuckerinversion (S. 100) bereits begegnet; dort mussten wir uns darauf beschränken, die vorstehend ausgeführte Lösung a posteriori als richtig nachzuweisen.

In ähnlicher Weise kann man

$$\int \operatorname{tg} x\,dx \text{ und } \int \operatorname{ctg} x\,dx$$

berechnen. Wir schreiben zunächst

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int\frac{\sin x}{\cos x}dx$$

und setzen nun

$$\cos x = u, \quad -\sin x\,dx = du,$$

so dass das Integral in

$$-\int\frac{du}{u} = -\ln u$$

übergeht. Es folgt daher*)

$$5)\quad \int \operatorname{tg} x\,dx = \ln\frac{1}{\cos x} + C.$$

Aehnlich erhalten wir

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int\frac{\cos x\,dx}{\sin x}$$

und wenn wir jetzt

$$\sin x = u, \quad \text{also } \cos x\,dx = du$$

setzen, so ergiebt sich

$$6)\quad \int \operatorname{ctg} x\,dx = \int\frac{du}{u} = \ln u, \text{ d. h.}$$
$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln\sin x + C.$$

*) Vgl. Formel 24 des Anhangs.

In derselben Weise findet man

$$\int \sin x \cos x \, dx.$$

Setzt man

$$\sin x = u, \quad \text{also} \quad \cos x \, dx = du,$$

so ergiebt

$$7) \qquad \int \sin x \cos x \, dx = \int u \, du = \frac{u^2}{2} = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

Die bisher behandelten Beispiele lassen erkennen, dass die Auswertung der Integrale erheblich komplizierter ist, als die Berechnung der Differentialquotienten. Es entspricht dies dem Charakter der Integralrechnung als einer umgekehrten Rechnungsart; im besondern tritt es darin hervor, dass uns für das Bilden des Integrals nicht ein solches Schema zu Gebote steht, wie wir es für die Differentialquotienten beliebiger Funktionen besitzen. Die Folge ist, dass die Ermittelung der Integrale ganz andere Anforderungen an das Können stellt, wie die Probleme der Differentialrechnung. Wir sind vorläufig noch weit davon entfernt, für beliebig gegebene Funktionen die Integralfunktionen angeben zu können; die Wissenschaft ist bei der Lösung dieser Aufgaben noch längst nicht zum Ende gekommen.

Auf solche Integrale näher einzugehen, ist hier nicht der Ort, zumal wir ihrer für die Anwendungen, die wir zu machen haben, nicht bedürfen. Wir wollen es uns jedoch nicht versagen, an einem Beispiel zu zeigen, wie man durch Kunstgriffe manche Integrale zu behandeln gelernt hat.

Wir suchen zunächst das Integral

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$$

zu bestimmen. Wegen $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$*) erhalten wir

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx + \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

und hieraus nach S. 115

$$8) \qquad \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln \sin x - \ln \cos x = \ln \frac{\sin x}{\cos x} = \ln \operatorname{tg} x + C.$$

*) Vgl. Formel 32 des Anhangs.

Mit Hilfe dieses Integrals kann man auch

$$\int \frac{dx}{\sin x} \text{ und } \int \frac{dx}{\cos x}$$

berechnen. Nach der Formel $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$*) wird

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$$

und zwar entsteht das letzte Integral, indem wir statt $dx : 2\, d\frac{x}{2}$ schreiben. Auf dieses Integral können wir unmittelbar die letzte Formel anwenden, und erhalten

$$9) \quad \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

Um jetzt das zweite der obigen Integrale zu berechnen, setzen wir zunächst, was sehr nahe liegt,

$$\cos x = \sin \left(\tfrac{\pi}{2} + x\right),$$**)

alsdann wird

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin \left(\frac{\pi}{2} + x\right)}.$$

Nun substituieren wir noch

$$\tfrac{\pi}{2} + x = u, \text{ also } dx = du$$

und finden, wenn wir dies einsetzen,

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{du}{\sin u} = \ln \operatorname{tg} \tfrac{u}{2}$$

oder endlich

$$10) \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$$

Man kann sich die vorstehenden Integralberechnungen formal dadurch etwas vereinfachen, dass man, analog wie bei den ähnlichen Aufgaben der Differentialrechnung (S. 91) von der wirklichen Einführung eines neuen Funktionszeichens u ganz absieht. Man kann z. B. das erste der auf S. 113 behandelten Integrale folgendermassen ermitteln:

---

*) Vgl. Formel 39 des Anhangs.

**) Vgl. Formel 26 des Anhangs.

Indem man analog zu der oben ausgeführten Umformung dx durch $d(a+x)$ ersetzt, erhält man

$$\int (a+x)^n dx = \int (a+x)^n d(a+x).$$

Hier ist $a+x$ als die neue Variabele zu betrachten; es ergiebt sich daher

$$\int (a+x)^n dx = \int (a+x)^n d(a+x) = \frac{(a+x)^{n+1}}{n+1} + C.$$

Um auf ähnliche Weise das Integral

$$\int \frac{dx}{\sin mx}$$

auszuwerten, schreibt man zunächst

$$\int \frac{dx}{\sin mx} = \int \frac{\frac{1}{m} d(mx)}{\sin mx} = \frac{1}{m} \int \frac{d(mx)}{\sin mx}$$

und kann nun die Gl. 9) anwenden; dadurch erhält man

$$\int \frac{dx}{\sin mx} = \frac{1}{m} \ln \operatorname{tg} \frac{mx}{2} + C.$$

Ein letztes Beispiel sei das folgende. Es ist

$$\int \frac{dx}{a-\alpha x} = \int \frac{\frac{1}{\alpha} d(\alpha x)}{a-\alpha x} = -\int \frac{\frac{1}{\alpha} d(a-\alpha x)}{a-\alpha x}$$

und hieraus folgt nunmehr

$$\int \frac{dx}{a-\alpha x} = -\frac{1}{\alpha} \ln (a-\alpha x) + C$$
$$= \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{a-\alpha x} + C.$$ *)

§ 8. Zerlegung in Partialbrüche.

Wir behandeln schliesslich noch einige Integrale, deren wir für einige bestimmte im folgenden Kapitel zu diskutierende Anwendungen benötigt sind. Zunächst sei das Integral

$$\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)}$$

zu berechnen.

Dieses Integral kann man folgendermassen behandeln. Wir zeigen zunächst, dass man zwei Zahlen α und β finden kann, sodass

*) Vgl. Formel 24 des Anhangs.

$$1)\quad \frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{\alpha}{a-x} + \frac{\beta}{b-x}$$ *)

ist. Nämlich es ist

$$\frac{\alpha}{a-x} + \frac{\beta}{b-x} = \frac{\alpha(b-x)+\beta(a-x)}{(a-x)(b-x)}$$
$$= \frac{\alpha b + \beta a - x(\alpha+\beta)}{(a-x)(b-x)}$$

und, wenn man jetzt α und β so wählt, dass

$$2)\quad \begin{aligned} \alpha b + \beta a &= 1 \\ \alpha + \beta &= 0 \end{aligned}$$

setzt, so erhält der Zähler des letzten Bruches wirklich den Wert 1. Die beiden letzten Gleichungen bestimmen α und β; sie sind als zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten α und β anzusehen, und ihre Auflösung giebt

$$3)\quad \alpha = \frac{1}{b-a},\ \beta = \frac{-1}{b-a}.$$

Wir finden also schliesslich

$$\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = \int \frac{1}{b-a}\frac{dx}{a-x} - \int \frac{1}{b-a}\frac{dx}{b-x}$$

und dies ergiebt nach S. 114

$$4)\quad \int \frac{dx}{(a-x)\,b-x)} = \frac{-1}{b-a}\ln(a-x) + \frac{1}{b-a}\ln(b-x)$$
$$= \frac{1}{b-a}\Big\{\ln(b-x) - \ln(a-x)\Big\}$$
$$= \frac{1}{b-a}\ln\frac{b-x}{a-x} + C.$$

Dies ist die gesuchte Integralfunktion.

Nicht wesentlich verschieden hiervon ist die Bestimmung des Integrals

$$\int \frac{A+Bx}{(a-x)(b-x)}\,dx,$$

wo auch A und B gegebene Konstanten sind. Wir suchen auch jetzt zunächst zwei Zahlen α und β zu ermitteln, sodass

$$5)\quad \frac{A+Bx}{(a-x)(b-x)} = \frac{\alpha}{a-x} + \frac{\beta}{b-x}$$

ist. Wie im vorstehenden Beispiel berechnet wurde, ist

$$\frac{\alpha}{a-x} + \frac{\beta}{b-x} = \frac{\alpha b + \beta a - x(\alpha+\beta)}{(a-x)(b-x)};$$

*) Dies ist die Umkehrung der in der Elementarmathematik vielfach behandelten Aufgabe, Brüche mit verschiedenen Nennern auf einen Hauptnenner zu bringen.

wenn wir daher α und β so wählen können, dass

$$6) \quad \begin{aligned} \alpha b + \beta a &= A \\ -(\alpha + \beta) &= B \end{aligned}$$

ist, so wird der Zähler des letzten Bruches, wie nötig, gleich demjenigen des gegebenen Bruches, nämlich gleich $A + Bx$. Die letzten beiden Gleichungen haben wir wieder als Gleichungen für α und β als Unbekannte aufzufassen; ihre Auflösung liefert

$$7) \quad \alpha = \frac{A + Ba}{b - a}, \quad \beta = \frac{A + Bb}{a - b}.$$

Nachdem wir so α und β berechnet haben, wollen wir der Kürze halber α und β für die weitere Rechnung in den Formeln beibehalten. Es ergiebt sich

$$\int \frac{A + Bx}{(a - x)(b - x)} dx = \int \frac{\alpha dx}{a - x} + \int \frac{\beta dx}{b - x}$$

und hieraus nach S. 114

$$\int \frac{A + Bx}{(a - x)(b - x)} dx = \alpha \ln \frac{1}{a - x} + \beta \ln \frac{1}{b - x} + C,$$

wo α und β die in Gl. 7. stehenden Werte haben.

Die Zerlegung der unter dem Integralzeichen stehenden Quotienten in die beiden einzelnen Quotienten, deren Nenner nur je einen Faktor enthalten (Gl. 5), bezeichnet man als Zerlegung in Partialbrüche.

Beispiele. Es ist

$$\int \frac{dx}{(1 - x)(2 - x)} = \ln \frac{2 - x}{1 - x} + C,$$

$$\int \frac{1 - 2x}{(1 - x)(2 - x)} dx = \ln (1 - x) + 3 \ln \frac{1}{2 - x} + C$$

$$= \ln \frac{1 - x}{(2 - x)^3} + C.$$ *)

Die vorstehend benutzte Methode lässt sich ohne weiteres auf den Fall ausdehnen, dass im Nenner des unter dem Integralzeichen stehenden Quotienten mehr als zwei Faktoren vorhanden sind. Wir zeigen die Art des allgemeinen Verfahrens für den Fall $n = 3$, mit dem man in den einfacheren Anwendungen fast immer ausreicht, und verweisen für das weitere auf die in der Vorrede genannten Lehrbücher.

Das Integral, das wir betrachten, sei

$$\int \frac{A + Bx + Cx^2}{(a - x)(b - x)(c - x)} dx = \int \frac{Z(x)}{N(x)} dx,$$

indem wir zur Abkürzung für den Zähler und Nenner des Quotienten, die beide Funktionen von x sind, die Funktionszeichen

*) Vgl. Formel 19 und 21 des Anhangs.

$$8)\quad \begin{matrix} Z(x) = A + Bx + Cx^2 \\ N(x) = (a-x)(b-x)(c-x) \end{matrix}$$

einführen. A, B, C, a, b, c sind als gegebene Zahlgrössen zu betrachten. Das Verfahren geht wiederum davon aus, den gegebenen Quotienten in Partialbrüche zu zerlegen. Wir setzen

$$9)\quad \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{A+Bx+Cx^2}{(a-x)(b-x)(c-x)} = \frac{\alpha}{a-x} + \frac{\beta}{b-x} + \frac{\gamma}{c-x}$$

und stehen somit der Aufgabe gegenüber, drei Zahlen α, β, γ so zu bestimmen, dass die vorstehende Gleichung richtig ist und zwar, welches auch der Wert von x sein mag. Diese Aufgabe gestattet folgende Lösung.

Wir multiplizieren die Gleichung mit $a-x$ und finden

$$\frac{Z(x)}{(b-x)(c-x)} = \frac{A+Bx+Cx^2}{(b-x)(c-x)} = \alpha + \beta\frac{a-x}{b-x} + \gamma\frac{a-x}{c-x}.$$

Setzen wir jetzt $x=a$, so nimmt rechts der zweite und dritte Summand den Wert Null an, es bleibt also nur α stehen, und wir erhalten

$$\frac{Z(a)}{(b-a)(c-a)} = \frac{A+Ba+Ca^2}{(b-a)(c-a)} = \alpha$$

und dies ist bereits diejenige Gleichung, die α bestimmt. In derselben Weise finden wir β und γ. Da unsere Ausdrücke in α, β, γ, resp. a, b, c durchaus analog gebildet sind, so müssen auch die Werte von β und γ demjenigen von α analog geformt sein; wir erhalten also die gesuchten Ausdrücke aus demjenigen von α einfach durch die bezüglichen Vertauschungen. Wir finden so:

$$10)\quad \begin{matrix} \alpha = \dfrac{A+Ba+Ca^2}{(b-a)(c-a)} = \dfrac{Z(a)}{(b-a)(c-a)} \\ \beta = \dfrac{A+Bb+Cb^2}{(a-b)(c-b)} = \dfrac{Z(b)}{(a-b)(c-b)} \\ \gamma = \dfrac{A+Bc+Cc^2}{(a-c)(b-c)} = \dfrac{Z(c)}{(a-c)(b-c)} \end{matrix}$$

Wir lassen auch hier der Kürze halber die so gefundenen Werte von α, β, γ in den Formeln stehen und finden alsdann

$$11)\quad \begin{aligned} \int \frac{Z(x)}{N(x)}dx &= \int \frac{\alpha\,dx}{a-x} + \int \frac{\beta\,dx}{b-x} + \int \frac{\gamma\,dx}{c-x} \\ &= \alpha \ln\frac{1}{a-x} + \beta\ln\frac{1}{b-x} + \gamma\ln\frac{1}{c-x} + C. \end{aligned}$$

Beispiel. Das gesuchte Integral sei

$$\int \frac{1-2x+3x^2}{(1-x)(2-x)(3-x)}dx.$$

Hier ist $A=1$, $B=-2$, $C=3$, $a=1$, $b=2$, $c=3$; also

$$\alpha = \frac{1-2.1+3.1}{(2-1)(3-1)} = \frac{2}{2} = 1$$
$$\beta = \frac{1-2.2+3.4}{(1-2)(3-2)} = \frac{9}{-1} = -9$$
$$\gamma = \frac{1-2.3+3.9}{(1-3)(2-3)} = \frac{22}{2} = 11$$

und es folgt daher

$$\int \frac{1-2x+3x^2}{(1-x)(2-x)(3-x)}\,dx = \int \frac{dx}{1-x} - \int \frac{9\,dx}{2-x} + \int \frac{11\,dx}{3-x}$$
$$= \ln \frac{1}{(1-x)} + 9\ln(2-x) + 11\ln \frac{1}{(3-x)} + C$$
$$= \ln \frac{(2-x)^9}{(1-x)(3-x)^{11}} + C.$$ *)

Wir geben endlich noch einige Beispiele für den Fall, dass von den drei Faktoren des Nenners zwei einander gleich sind. Es handele sich um das Integral

$$\int \frac{dx}{(a-x)^2(b-x)}.$$

Auch in diesem Fall hat man den unter dem Integral stehenden Quotienten in Partialbrüche zu zerlegen. Wir setzen jetzt

$$12) \quad \frac{1}{(a-x)^2(b-x)} = \frac{\alpha}{(a-x)^2} + \frac{\beta}{(a-x)(b-x)},$$

wo α und β noch unbekannte Konstanten bedeuten; in der That wird bei diesem Ansatz erreicht, dass die rechte Seite, auf einen Nenner gebracht, den Generalnenner $(a-x)^2(b-x)$ erhält. Es fragt sich nun wieder, ob man α und β so bestimmen kann, dass diese Gleichung erfüllt ist.

Um diese Bestimmung auszuführen, verfahren wir folgendermassen: Zunächst multiplizieren wir unsere Gleichung mit $(a-x)^2$ und erhalten

$$\frac{1}{b-x} = \alpha + \beta\frac{a-x}{b-x},$$

und wenn wir jetzt wieder $x = a$ setzen, so bleibt rechts nur α stehen, es ergiebt sich also

$$13) \quad \frac{1}{b-a} = \alpha.$$

Damit ist bereits α bestimmt.

Um nun noch β zu bestimmen, gehen wir auf die Gleichung

$$\frac{1}{(a-x)^2(b-x)} = \frac{\alpha}{(a-x)^2} + \frac{\beta}{(a-x)(b-x)}$$

*) Vgl. Formel 19 und 21 des Anhangs.

zurück. In ihr ist jetzt nur β unbekannt und kann daher berechnet werden. Setzen wir für α seinen Wert ein und multiplizieren mit $(a-x)^2(b-x)$, so folgt

$$1=\frac{b-x}{b-a}+\beta(a-x),$$

$$\beta(a-x)=1-\frac{b-x}{b-a}$$

$$=\frac{b-a-(b-x)}{b-a}=-\frac{a-x}{b-a},$$

und wenn wir noch durch $(a-x)$ dividieren, so ergiebt sich

$$14)\quad \beta=-\frac{1}{b-a}.$$

Damit folgt

$$15)\quad \frac{\beta}{(a-x)(b-x)}=-\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{(a-x)(b-x)}$$

und die Gleichung 12) verwandelt sich nunmehr in

$$\frac{1}{(a-x)^2(b-x)}=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{(a-x)^2}-\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{(a-x)(b-x)}.$$

Jetzt hätten wir noch den zweiten Bruch rechts nach der oben gelehrten Methode in Partialbrüche zu zerlegen, wenn wir die volle Zerlegung kennen lernen wollen. In unserem Falle sind wir dessen aber nicht benötigt, da wir diese Zerlegung oben auf S. 118 schon ausgeführt, resp. das bezügliche Integral schon ermittelt haben. Wir finden

$$\int\frac{dx}{(a-x)^2(b-x)}=\frac{1}{b-a}\left\{\int\frac{dx}{(a-x)^2}-\int\frac{dx}{(a-x)(b-x)}\right\}$$

und mit Rücksicht auf Gleichung 4), S. 118 und auf S. 114

$$16)\quad \int\frac{dx}{(a-x)^2(b-x)}=\frac{1}{b-a}\left\{-\frac{1}{a-x}-\frac{1}{b-a}\ln\frac{b-x}{a-x}\right\}$$

$$=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{a-x}-\frac{1}{(b-a)^2}\ln\frac{b-x}{a-x}+C.$$

Endlich behandeln wir noch das Integral

$$\int\frac{A+Bx}{(a-x)^2(b-x)}\,dx.$$

Auch hier gelangen wir zum Ziel, wenn wir

$$17)\quad \frac{A+Bx}{(a-x)^2(b-x)}=\frac{\alpha}{(a-x)^2}+\frac{\beta}{(a-x)(b-x)}$$

setzen. Multiplizieren wir mit $(a-x)^2$, so folgt

$$\frac{A+Bx}{b-x}=\alpha+\beta\frac{a-x}{b-x},$$

und wenn wir jetzt $x=a$ setzen, so erhalten wir

$$18)\quad \frac{A+Ba}{b-a}=\alpha,$$

womit der Wert von α bereits wieder gefunden ist. Gehen wir jetzt zur Gleichung 17) zurück, lassen aber α der Kürze halber zunächst stehen, so folgt

$$\frac{\beta}{(a-x)(b-x)}=\frac{A+Bx}{(a-x)^2(b-x)}-\frac{\alpha}{(a-x)^2}$$

und hieraus durch Multiplikation mit $(a-x)^2(b-x)$

$$\begin{aligned}\beta(a-x)&=A+Bx-\alpha(b-x)\\&=A+Bx-\frac{A+Ba}{b-a}(b-x)\\&=\frac{(A+Bx)(b-a)-(A+Ba)(b-x)}{b-a}.\end{aligned}$$

Hieraus findet man nach Ausrechnung

$$\beta(a-x)=\frac{-(A+Bb)(a-x)}{b-a}.$$

Nach Division mit $a-x$ folgt weiter

$$19)\quad \beta=\frac{A+Bb}{a-b}.$$

Damit ist das Integral auf bekannte Integrale zurückgeführt. Durch Einsetzen folgt noch

$$20)\quad \int\frac{A+Bx}{(a-x)^2(b-x)}dx=\int\frac{\alpha dx}{(a-x)^2}+\int\frac{\beta dx}{(a-x)(b-x)}$$
$$\frac{A+Ba}{b-a}\cdot\frac{1}{a-x}-\frac{A+Bb}{(b-a)^2}\ln\frac{b-x}{a-x}+C.$$

Für kompliziertere Fälle verweisen wir auf die in der Vorrede genannten Lehrbücher. Will man die vorstehende Behandlung auf andere Fälle ausdehnen, so ist zu beachten, dass bei der Zerlegung des gegebenen Quotienten in nur zwei andere, wie in Gl. 12 und 17 geschehen, statt des Zählers β im allgemeinen ein Ausdruck auftritt, der x noch enthält.

In den bisher behandelten Beispielen trat im Nenner stets eine höhere Potenz von x auf, als im Zähler; es fragt sich demnach noch, wie wir das Integral eines Bruches in dem Fall bestimmen, dass der Zähler x mindestens in der gleichen Potenz enthält, wie der Nenner. Es wird genügen, wenn wir die Methode für den einfachsten Fall erörtern, zumal nur dieser in den hier berücksichtigten Anwendungen auftritt.

Das zu bestimmende Integral sei

$$\int \frac{ax+b}{x+\alpha}\,dx.$$

Indem wir den Zähler in gewöhnlicher Weise durch den Nenner dividieren, finden wir

$$\frac{ax+b}{x+\alpha} = a + \frac{b-a\alpha}{x+\alpha}$$ *)

und demnach

$$\begin{aligned}\int \frac{ax+b}{x+\alpha}\,dx &= \int a\,dx + \int \frac{b-a\alpha}{x+\alpha}\,dx \\ &= a\int dx + (b-a\alpha)\int \frac{d(x+\alpha)}{x+\alpha} \\ &= ax + (b-a\alpha)\ln(x+\alpha) + C.\end{aligned}$$

Beispiel. Es sei zu berechnen

$$\int \frac{2x+1}{x-3}\,dx.$$

Wir finden zunächst

$$\frac{2x+1}{x-3} = 2 + \frac{7}{x-3}$$

und demnach

$$\int \frac{2x+1}{x-3}\,dx = 2x + 7\ln(x-3) + C.$$

Analog hat man zu verfahren, wenn der Nenner aus mehr als einem Faktor besteht. Man hat ihn dann zunächst auszumultiplizieren, nach x zu ordnen und den in gleicher Weise umgeformten Zähler durch ihn zu dividieren, bis die weitere Division unmöglich wird; der Rest ist dann immer ein Bruch, dessen Zähler x in niederer Ordnung enthält als der Nenner.**)

*) Vgl. § 1 der Formelsammlung.

**) Vgl. § 1 der Formelsammlung.

Fünftes Kapitel.

Anwendungen der Integralrechnung.

Zur weiteren Uebung wollen wir die vorstehend mitgeteilten Integrationsmethoden bei der rechnerischen Behandlung einiger naturwissenschaftlichen Aufgaben verwerten.

§ 1. Anziehung eines Stabes.

Befinden sich zwei Massenpunkte m und m' in einem Abstande r von einander, so findet eine Anziehung von der Grösse

$$1) \quad A = \frac{m m'}{r^2}$$

(Gesetz von Newton) statt; wie gross ist die Anziehung, die ein dünner Stab von gleichförmiger Dicke und von der Länge l auf einen Massenpunkt m ausübt, der sich in der Richtung des Stabes und in einer Entfernung a von seinem Ende befindet?

Wir denken uns zunächst die Länge des Stabes veränderlich und setzen sie gleich x und fragen uns: um wieviel nimmt die Anziehung dieses Stabes zu, wenn seine Länge um das sehr kleine Stück dx vermehrt wird? Die Anziehung F des Stabes auf den Massenpunkt m wird durch die Verlängerung des Stabes um dx (Fig. 40) offenbar um denjenigen Betrag dF vermehrt, welcher der Anziehung eines sehr kurzen Stäbchens von der Länge dx entspricht. Dieses sehr kurze Stäbchen können wir aber als einen Massenpunkt behandeln, indem wir uns seine Masse in einem seiner Punkte konzentriert denken, weil seine Dimensionen ausserordentlich klein im Vergleich zu seinem Abstande von m sind, welch' letzterer offenbar $mA + x = a + x$ beträgt; die Masse des sehr kurzen Stäbchens beträgt nun aber

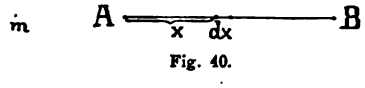


Fig. 40.

Mdx, wenn M die Masse eines Stabes von der Länge Eins bezeichnet, und so ergiebt sich aus dem Fundamentalgesetz (1) dF unmittelbar zu

$$dF = \frac{mMdx}{(a+x)^2}.$$

Diese Gleichung ist sehr leicht zu integrieren, indem wir der Reihe nach die Umformungen nach S. 110 Gl. 6) und 113 vornehmen,

$$F = \int \frac{mM}{(a+x)^2}\,dx = mM \int \frac{dx}{(a+x)^2} = mM \int \frac{d(a+x)}{(a+x)^2}.$$

Auf diese Weise haben wir schliesslich das Integral auf die Form

$$\int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z} + C$$

gebracht und finden daher

$$2) \quad F = -\frac{mM}{(a+x)} + C.$$

Nun wissen wir aber, dass ein Stab von der Länge $x=0$ die Anziehung $F=0$ ausübt, weil ein solcher Stab ja eben keine Masse besitzt und daher auch keine Kraftwirkung verursachen kann. Setzen wir in (2) somit $x=0$, so folgt

$$3) \quad 0 = -\frac{mM}{a} + C$$

und durch Subtraktion (2) — (3) finden wir

$$4) \quad F = mM\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+x}\right).$$

Wählen wir unsern Stab von der Länge l anstatt von x, so haben wir in (4) einfach $l=x$ zu setzen und finden schliesslich

$$5) \quad F = mM\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l}\right),$$

womit das Problem gelöst ist.

Denken wir uns die Länge unseres Stabes l sehr gross, so wird der Bruch $\frac{1}{a+l}$ sehr klein, sodass wir ihn neben $\frac{1}{a}$ vernachlässsigen können; in diesem Falle nimmt die Formel also die überaus einfache Gestalt an

$$F = \frac{mM}{a}.$$

Ein Stab also, dessen Länge sehr gross im Vergleich zu der Entfernung seines einen Endes von dem in seiner Verlängerung gelegenen Massenpunkte m ist, übt eine von seiner Länge unabhängige und dem Abstand jenes Endes vom Massenpunkt umgekehrt proportionale Anziehung aus.

§ 2. Hypsometrische Formel.

Der Luftdruck auf der Erdoberfläche betrage B cm Quecksilber, die Dichte der Luft in Bezug auf Quecksilber sei daselbst S; wie gross ist der Luftdruck in der Erhebung h über der Erdoberfläche?

Der Luftdruck wird erzeugt durch das Gewicht der über uns befindlichen Luft und zwar übt eine Luftsäule von der Höhe h cm und konstanter Dichte S einen Druck von hS cm Quecksilber aus. Würde also die Dichte der Luft nach oben konstant bleiben, so würde der Barometerdruck pro cm Erhebung um S cm abnehmen. In Wirklichkeit nimmt aber mit dem abnehmenden Druck die Dichte der Luft ebenfalls ab und zwar ist nach dem Gesetz von Boyle die Dichte der Luft dem Barometerdruck direkt proportional.

Befinden wir uns daher in der Höhe x über der Erdoberfläche und finden daselbst den Druck zu y, so wird bei einer weiteren Erhebung um dx der Druck abnehmen um

$$s\,dx,$$

wenn wir mit s die Dichte der Luft in der Höhe x bezeichnen; innerhalb des sehr kleinen Stückchens dx können wir die Dichte der Luft als konstant ansehen. Nun verhält sich aber nach dem Gesetz von Boyle

$$s : S = y : B$$

und somit wird

$$s = S\frac{y}{B}.$$

Wir finden also für die Druckzunahme dy

$$1) \quad dy = -s\,dx = -S\frac{y}{B}dx;$$

die rechte Seite erhält das negative Vorzeichen, weil eben eine Druckabnahme stattfindet. Formen wir (1) passend um, so wird

$$dx = -\frac{B}{S}\frac{dy}{y}$$

oder integriert nach S. 104

$$2) \quad x = -\frac{B}{S}\ln y + C.$$

Nun ist aber für $x = 0$, d. h. für die Erdoberfläche, der Barometerdruck $y = B$; setzen wir dies in (2) ein, so wird

$$3) \quad 0 = -\frac{B}{S}\ln B + C.$$

(2)—(3) liefert

$$4) \quad x = \frac{B}{S}\ln\frac{B}{y}$$

und für den gesuchten Luftdruck in der Höhe $x = h$ folgt

$$\ln \frac{B}{y} = \frac{S}{B} h$$

oder

$$y = Be^{-\frac{S}{B}h},$$

während umgekehrt aus dem beobachteten Luftdruck y sich die Erhebung h über die Erdoberfläche nach (4) zu

$$h = \frac{B}{S} \ln \frac{B}{y}$$

(hypsometrische Formel) berechnet.*)

§ 3. Erkaltungsgesetz von Newton.

Ein Körper habe die Temperatur ϑ_1, während die konstante Temperatur der Umgebung niedriger, etwa ϑ_0 sei; gesucht ist das Gesetz, nach welchem er erkalten wird.

Während der Abkühlung wird die Temperatur des Körpers infolge seiner Wärmeabgabe allmählich von ϑ_1 auf ϑ_0 sinken; wir wollen die Zeit t von Beginn des Prozesses, also von dem Augenblick an zählen, in welchem der Körper die Temperatur ϑ_1 besitzt. Nach dem Ablauf der Zeit t möge die Temperatur des Körpers von ϑ_1 auf ϑ gesunken sein, sodass der Ueberschuss über die Temperatur der Umgebung nur mehr $\vartheta - \vartheta_0$ beträgt. Die von vornherein wahrscheinlichste Hypothese, die wir (mit Newton) machen können, ist offenbar die, dass die in der sehr kurzen Zeit dt abgegebene Wärmemenge dW des Körpers dem Ueberschuss über die Temperatur der Umgebung proportional ist. Wir hätten hiernach zu setzen

$$1) \quad dW = k(\vartheta - \vartheta_0)\, dt,$$

worin k eine Konstante (Proportionalitätsfaktor) bezeichnet. Nun ist aber die Wärmemenge W, die der Körper bis zum völligen Erkalten, d. h. bis zur Annahme der Temperatur der Umgebung ϑ_0 abzugeben vermag,

$$2) \quad W = mc(\vartheta_0 - \vartheta),$$

wenn wir mit m die Masse des Körpers und mit c seine spezifische Wärme bezeichnen. Differenzieren wir (2), so finden wir

$$3) \quad dW = -mc\, d\vartheta$$

und in (1) eingesetzt

$$4) \quad -mc\, d\vartheta = k(\vartheta - \vartheta_0)\, dt.$$

*) Vgl. wegen des Einflusses der Temperatur u. s. w. Kohlrausch, Leitfaden der prakt. Physik. 7. Aufl. S. 75.

Schreiben wir 4) in der Form

$$5) \quad -\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{k}{mc}(\vartheta - \vartheta_0),$$

so können wir den negativ genommenen Differentialquotienten $\frac{d\vartheta}{dt}$ passend als »Abkühlungsgeschwindigkeit« bezeichnen und können die oben eingeführte Hypothese auch in der Form aussprechen: Die Abkühlungsgeschwindigkeit eines Körpers ist in jedem Augenblick dem Ueberschuss seiner Temperatur über die der Umgebung proportional.

Bei der Integration beachten wir, dass die Masse m absolut, die spezifische Wärme c sehr nahe von der Temperatur unabhängig ist und schreiben daher 4) in der Form

$$6) \quad -\frac{mc}{k}\frac{d\vartheta}{\vartheta - \vartheta_0} = dt$$

oder in integrierter Form (nach S. 104)

$$7) \quad -\frac{mc}{k}\ln(\vartheta - \vartheta_0) = t + C.$$

Nun ist für $t = 0$ der Wert der Temperatur $\vartheta = \vartheta_1$; setzen wir diese speziellen Werte in 7) ein, so wird

$$8) \quad -\frac{mc}{k}\ln(\vartheta_1 - \vartheta_0) = C$$

und 7)—8) liefert

$$9) \quad t = \frac{mc}{k}\ln\frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{\vartheta - \vartheta_0}.$$

Obige Gleichung haben wir aus einer an sich zwar wahrscheinlichen, aber immerhin zweifelhaften Hypothese abgeleitet. Direkt können wir dieselbe nicht prüfen, denn wir sind eben nicht im stande, die Temperaturänderung $d\vartheta$, die sich in dem äusserst kurzen Zeitintervall dt abspielt, experimentell zu bestimmen; wohl aber können wir uns mit der grössten Genauigkeit darüber Auskunft verschaffen, ob Gleichung 9) zutreffend ist.

Es wird nützlich sein, den Gebrauch dieser Gleichung an einem Beispiel zu erläutern, wozu eine Beobachtungsreihe dienen möge, die für die Erkaltung eines Körpers bei einer Umgebungstemperatur $\vartheta_0 = 0^0$ erhalten wurde.*)

*) Winkelmann, Wied. Ann. 44 195 (1891).

ϑ	t	$\frac{1}{t}\log\frac{\vartheta_1-\vartheta_0}{\vartheta-\vartheta_0}$
18,9	3,45	0,006490
16,9	10,85	0,006540
14,9	19,30	0,006509
12,9	28,80	0,006537
10,9	40,10	0,006519
8,9	53,75	0,006502
6,9	70,95	0,006483

$\vartheta_0 = 0$; $\vartheta_1 = 19{,}90^0$.

Der in der letzten Kolumne berechnete Ausdruck ist nach (9)

$$\frac{1}{t}\log\frac{\vartheta_1-\vartheta_0}{\vartheta-\vartheta_0} = 0{,}4343\,\frac{k}{mc}$$

(0,4343 = Modul der Brigg'schen Logarithmen) und er muss konstant sein, wenn unsere Fundamentalhypothese zutrifft. Thatsächlich lehrt obige Tabelle, dass dieser Ausdruck nur sehr kleine und überdies unregelmässige Schwankungen aufweist, die auf Rechnung der Beobachtungsfehler zu setzen sind.*)

Der vorstehend eingeschlagene Weg kann als typischer Beleg der allgemeinen Ausführungen von S. 95 gelten; die mathematisch formulierte Hypothese betreffs einer Naturerscheinung führt zur Aufstellung eines Ausdrucks, der Differentialquotienten enthält (einer »Differentialgleichung«). Um die Forderungen jener Hypothese aber auf die Wirklichkeit zu übertragen, müssen wir durch Integration zu einer Gleichung zu gelangen suchen, die keine Differentiale mehr, sondern nur endliche, d. h. der Beobachtung und Anschauung direkt zugängliche Grössen enthält.

Die Aufstellung der Differentialgleichung muss durch einen glücklichen Griff des Naturforschers geschehen; ihre Integration ist dann lediglich Sache des mathematischen Kalkuls.

§ 4. Maximaltemperatur einer Flamme.

Ehe wir diese Aufgabe behandeln, wollen wir die Wärmemenge ermitteln, die ein Körper, dessen Masse m Gramm beträgt, an die Umgebung abgiebt, wenn seine Temperatur von t_2 auf t_1 sinkt.

*) Auf Gleichung (9) basiert eine Methode zur Bestimmung der spezifischen Wärme c; vgl. hierüber z. B. Kohlrausch, Leitf. d. prakt. Physik, VII. Aufl. S. 114.

Wenn die spezifische Wärme c des Körpers mit der Temperatur sich nicht ändert, sondern konstant bleibt, so giebt der Körper bei der Abkühlung einfach die Wärmemenge W

$$W = mc(t_2 - t_1)$$

ab. Diese Bedingung ist aber häufig nicht erfüllt, indem c eine mehr oder minder deutlich ausgesprochene Temperaturfunktion ist. Man setzt sie in der Regel

$$c = a + \beta(t - t_0) + \gamma(t - t_0)^2 + \ldots,$$

in welcher Gleichung die Zahl der Glieder je nach der Grösse der Annäherung sich richtet, welche die jeweiligen Beobachtungsdaten gestatten; a bedeutet darin offenbar die spezifische Wärme für die als Ausgangstemperatur gewählte Temperatur t_0. Wenn dann also die Temperatur des Körpers von t auf $t - dt$ sinkt, so giebt der Körper Wärmemenge ab

$$dW = mcdt = m\left\{a + \beta(t - t_0) + \gamma(t - t_0)^2 + \ldots\right\} dt$$

oder integriert

$$1) \quad W = m\left\{a(t - t_0) + \frac{\beta(t - t_0)^2}{2} + \frac{\gamma(t - t_0)^3}{3} + \ldots\right\} + C;$$

nun ist für $t = t_1$ offenbar $W = 0$, weil der Körper ja auf t_1 angelangt sich nicht weiter abkühlen soll. Somit wird

$$2) \quad 0 = m\left\{a(t_1 - t_0) + \frac{\beta(t_1 - t_0)^2}{2} + \frac{\gamma(t_1 - t_0)^3}{3} + \ldots\right\} + C;$$

(1) — (2) liefert

$$3) \quad W = m\left\{a(t - t_1) + \beta\frac{(t - t_0)^2 - (t_1 - t_0)^2}{2} + \gamma\frac{(t - t_0)^3 - (t_1 - t_0)^3}{3} + \ldots\right\}.$$

Setzen wir in obige Gleichung $t = t_2$, so erhalten wir offenbar die gesuchte Wärmemenge bei der Abkühlung von t_2 auf t_1.

Zur Maximaltemperatur einer Flamme führt uns nunmehr folgende einfache Ueberlegung. Die Temperaturerhöhung wird erzeugt durch die Verbrennungswärme der verbrennenden Substanz; die Wärmemenge, die das Produkt der Verbrennung bei seiner Abkühlung von der Flammentemperatur auf die Temperatur der Umgebung abgiebt, muss jener Verbrennungswärme gleich sein. Bezeichnen wir also die Verbrennungswärme mit V und ist die spezifische Wärme des Verbrennungsproduktes wieder wie oben

$$a + \beta(t - t_0) + \gamma(t - t_0)^2 + \ldots,$$

so ist die Flammentemperatur, d. h. die Erwärmung $t - t_1$ des Verbrennungsproduktes über die Temperatur t_1 der Umgebung einfach nach Gl. (3) zu berechnen, indem wir

$$V = W$$

setzen.

Als Beispiel wählen wir die Verbrennung von Kohlenoxyd in (reinem) Sauerstoff. Die Verbrennungswärme von $m = 28$ g Kohlenoxyd (Grammmolekül $CO = 28$) beträgt $W = 67700$; für die spezifische Wärme des entstandenen Produktes ($28 + 16 = 44$ g Kohlensäure) giebt Le Chatelier die Formel*), $t_0 = -273$ angenommen,

$$mc = 6{,}5 + 0{,}0084\,(t + 273)$$

(Molekularwärme von CO_2 bei konstantem Druck). Sei die Anfangstemperatur $t_1 = 0$, so liefert (3) die Gleichung

$$4) \quad 67700 = 6{,}5\,t + \frac{0{,}0084\,(t^2 + 2 \times 273\,t)}{2}.$$

Berechnen wir aus dieser (quadratischen) Gleichung t, so finden wir

$$t = 3205^0.$$

In Wirklichkeit wirken übrigens manche Umstände, die obige Maximaltemperatur nicht unerheblich herunterdrücken, wie Ausstrahlung, unvollständige Verbindung infolge von Dissociation u. dgl. Sehr stark aber würde man sich obigem Werte nähern, wenn man Kohlenoxyd und Sauerstoff in grosser Menge und bei grossem Drucke zur Explosion brächte.

§ 5. Arbeitsleistung bei isothermer Ausdehnung eines idealen Gases.

Wenn ein Gas bei konstant erhaltenem Drucke p sich um das Volum v ausdehnt, so beträgt die dabei geleistete Arbeit bekanntlich pv; lassen wir aber (bei konstant erhaltener Temperatur) eine abgeschlossene Gasmenge sich vom Volumen v_1 auf das Volumen v_2 ausdehnen, so ändert sich der Druck fortwährend, weil er ja um so kleiner wird, je mehr das Volumen wächst.

Wohl aber können wir während der Ausdehnung um das sehr kleine Volum dv den Druck p als konstant ansehen, weil letzterer ja während dieser Ausdehnung nur eine äusserst minimale Aenderung erfährt, und daher die hierbei geleistete Arbeit gleich $p\,dv$ setzen. Bezeichnen wir die gesuchte Arbeitsgrösse mit A, so wird also

$$1) \quad dA = p\,dv.$$

Um (1) zu integrieren, müssen wir beachten, dass p eine Funktion von v ist, dass also

$$2) \quad p = f(v)$$

zu setzen ist. Die Natur dieser Funktion muss uns natürlich bekannt sein, damit die Rechnung ausführbar wird.

*) Vgl. z. B. Nernst, Theoret. Chemie S. 37.

Nehmen wir zunächst an, dass das Gas dem Gesetz von Boyle gehorcht und dass die Ausdehnung bei konstant erhaltener Temperatur erfolgt. Dann wird

$$3) \quad pv = k,$$

wo k eine von den Versuchsbedingungen abhängige Konstante (d. h. keine Funktion des Druckes oder Volumens) bedeutet. Somit wird

$$4) \quad p = f(v) = \frac{k}{v}$$

und in (1) eingesetzt

$$dA = \frac{k}{v}\, dv$$

und integriert nach S. 104

$$5) \quad A = k \ln v + C.$$

Nun ist aber für $v = v_1$ offenbar $A = 0$, weil ohne Ausdehnung keine Arbeit geleistet wird. Somit wird

$$6) \quad 0 = k \ln v_1 + C$$

und aus (5) — (6) wird

$$A = k \ln \frac{v}{v_1}.$$

Bei der Ausdehnung von v_1 auf v_2 wird natürlich

$$A = k \ln \frac{v_2}{v_1}.$$

Setzen wir

$$v_1 = \frac{k}{p_1} \text{ und } v_2 = \frac{k}{p_2},$$

so wird

$$A = k \ln \frac{p_1}{p_2},$$

welche Gleichung die bei der Ausdehnung der betreffenden Gasmasse geleistete Arbeit angiebt, wenn infolge der Ausdehnung der Druck von p_1 auf p_2 sinkt.

Die vorstehend abgeleiteten Gleichungen liefern z. B. die bei der Expansion des im Cylinder einer Dampfmaschine abgeschlossenen Dampfes geleistete Arbeit; sie sind ferner für mannigfache Rechnungen in der Theorie der Lösungen grundlegend u. s. w.

§ 6. Arbeitsleistung bei isothermer Ausdehnung eines stark komprimierten Gases.

Ist das betreffende Gas so stark komprimiert, dass die Anwendung des Boyle'schen Gesetzes keine richtigen Werte mehr giebt, so können

wir die Beziehung zwischen Druck und Volumen durch die Gleichung von van der Waals (S. 32) ausdrücken

$$7) \quad \left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = k,$$

worin a, b, k der betreffenden Gasmasse eigentümliche Konstante sind. Lösen wir (7) nach p auf, so wird

$$p = f(v) = \frac{k}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

und somit in (1) eingesetzt

$$dA = \frac{k}{v-b}\,dv - \frac{a}{v^2}\,dv.$$

Die Integration liefert (S. 104)

$$8) \quad A = k \ln (v-b) + \frac{a}{v} + C.$$

Für $v = v_1$ wird A wiederum gleich Null, d. h. wir erhalten

$$9) \quad 0 = k \ln (v_1-b) + \frac{a}{v_1} + C.$$

(8)—(9) liefert

$$A = k \ln \frac{v-b}{v_1-b} - a\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v}\right)$$

und schliesslich $v = v_2$ gesetzt

$$10) \quad A = k \ln \frac{v_2-b}{v_1-b} - a\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right).$$

Die obige Gleichung spielt in der Theorie von van der Waals eine wichtige Rolle. — Um die Arbeitsleistung vom Drucke p_2 auf p_1 zu berechnen, müssten wir (7) nach v auflösen und die zu v_1 und v_2 gehörigen Werte in (10) einsetzen, doch wollen wir diese ziemlich umständliche Rechnung hier nicht ausführen.

§ 7. Arbeitsleistung bei isothermer Ausdehnung eines sich dissoziierenden Gases.

Als dritten Fall betrachten wir ein Gas, das bei der Ausdehnung sich dissoziiert, und zwar sollen infolge der grösseren Raumerfüllung einzelne der Gasmoleküle in zwei neue sich spalten (binäre Dissoziation). Dann gilt für die Abhängigkeit des Dissoziationsgrades x von dem Volum v, das die Gasmasse erfüllt, die Beziehung (vgl. S. 34)

$$1) \quad Kv = \frac{x^2}{1-x}.$$

Würde das Gas gar nicht dissoziiert sein, so würde für die Beziehung zwischen Druck und Volumen das Gesetz (S. 132)

$$2) \quad pv = k$$

gelten, worin also die Grösse k während der Ausdehnung konstant bleibt. Da aber das Gas dissoziiert ist und demgemäss eine grössere Zahl von Molekülen enthält, so ist der Druck grösser, und zwar steigt der Druck im Verhältnis dieser Vergrösserung, weil ja bei konstanter Temperatur der Druck der Zahl der Moleküle proportional ist. Wenn aber der Bruchteil x der Gasmasse, die wir uns aus n nichtdissoziierten Molekülen gebildet vorstellen wollen, dissoziiert ist, so beträgt $(1-x)n$ die Zahl der nichtdissoziierten und $2xn$ die Zahl der durch Dissoziation neu gebildeten Moleküle. Demgemäss verhält sich der wirkliche Druck zu dem Druck ohne Dissoziation wie

$$n:(1-x)n+2xn = 1:1+x$$

und wir finden für den thatsächlich vom Gase ausgeübten Druck P

$$3) \quad P = (1+x)p.$$

Die Arbeit dA während der Volumausdehnung dv ist nun wie oben

$$4) \quad dA = Pdv$$

oder nach (3)

$$5) \quad dA = (1+x)pdv = pdv + xpdv.$$

Die Arbeitsleistung erhalten wir in (5) in zwei Teile zerlegt und wir können schreiben

$$6) \quad dA_1 = pdv,$$

$$7) \quad dA_2 = xpdv,$$

worin

$$8) \quad dA_1 + dA_2 = dA$$

ist. Gl. (6) können wir aber genau wie S. 132 behandeln und wir finden daher

$$9) \quad A_1 = k \ln \frac{v_2}{v_1},$$

so dass nur noch A_2 zu ermitteln ist.

Zu diesem Zweck müssen wir beachten, dass x, p und v sich gleichzeitig ändern, doch in einer Weise, die durch die Gleichungen (1) und (2) bestimmt ist. Wir können daher diese drei Variabeln durch eine einzige ersetzen, als welche wir am einfachsten x wählen. Differenzieren wir (1), so finden wir dv

$$10) \quad dv = \frac{x(2-x)}{K(1-x)^2} dx$$

und für p nach (2) und (1)

$$11) \quad p = \frac{k}{v} = \frac{kK(1-x)}{x^2}.$$

(10) und (11) in (7) eingesetzt, ergiebt (S. 125)

$$dA_2 = k\frac{2-x}{(1-x)}dx = k\left(\frac{1}{1-x}+1\right)dx.$$

Die Integration liefert (nach S. 104)

$$12)\quad A_2 = k(x - \ln[1-x]) + C.$$

Nun ist A_2 (ebenso wie A_1) für $v = v_1$ gleich Null; somit wird

$$13)\quad 0 = k(x_1 - \ln[1-x_1]) + C,$$

worin x_1 den zu v_1 gehörigen und aus Gl. (1) zu berechnenden Wert bezeichnet.

Subtrahieren wir (13) von (12) und setzen gleichzeitig den zu v_2 gehörigen Wert von x ein, den wir mit x_2 bezeichnen wollen, so wird

$$14)\quad A_2 = k\left(x_2 - x_1 - \ln\frac{1-x_2}{1-x_1}\right).$$

Aus

$$A = A_1 + A_2$$

folgt schliesslich [Gl. (9) und (14)]

$$15)\quad A = k\left(\ln\frac{v_2}{v_1} + x_2 - x_1 - \ln\frac{1-x_2}{1-x_1}\right).$$

Darin ist x_1 und x_2, wie bemerkt, aus Gl. (1) zu berechnen, und zwar ergiebt sich

$$x_1 = \frac{Kv_1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4}{Kv_1}} - 1\right)$$

$$x_2 = \frac{Kv_2}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4}{Kv_2}} - 1\right).$$

Gl. (15) wird aber übersichtlicher, wenn wir umgekehrt v_1 und v_2 durch x_1 und x_2 ausdrücken, d. h. wenn wir einführen, wiederum nach Gl. (1),

$$v_1 = \frac{x_1^2}{K(1-x_1)},\quad v_2 = \frac{x_2^2}{K(1-x_2)};$$

wir erhalten so

$$A = k\left(x_2 - x_1 - 2\ln\frac{x_1[1-x_2]}{[1-x_1]x_2}\right).$$

§ 8. Berechnung des Reaktionsverlaufs vollständig verlaufender Reaktionen.

Wenn n verschiedene Moleküle sich mit einander umsetzen, so ist die Reaktionsgeschwindigkeit nach dem Gesetze der chemischen Massenwirkung in jedem Augenblick dem Produkt ihrer Konzentrationen proportional.*) Nehmen wir der Einfachheit willen an, dass sämtliche

*) Vgl. z. B. Nernst, Theoret. Chemie S. 430.

Molekülgattungen bei Beginn der Reaktion, also zur Zeit $t=0$, in äquimolekularer Menge, etwa mit der Konzentration a, vorhanden seien, so wird ihre Konzentration zur Zeit t nur noch $(a-x)$ betragen, wo dann x die inzwischen umgesetzte Menge bedeutet. Wenn in der nunmehr folgenden sehr kleinen Zeit dt sich die Menge dx umsetzt, so bedeutet $\frac{dx}{dt}$ die Reaktionsgeschwindigkeit und wir erhalten also

$$1) \quad \frac{dx}{dt}=k(a-x)^n;$$

hierin bedeutet k eine während des Reaktionsverlaufes konstante, d. h. von den beiden Variablen x und t unabhängige Grösse.

Die Integration der passend umgeformten Gleichung (1)

$$\frac{dx}{(a-x)^n}=k\,dt$$

liefert (S. 113)

$$2) \quad \frac{1}{(n-1)(a-x)^{n-1}}=kt+C.$$

Nun ist für $x=0$ auch $t=0$; somit wird

$$3) \quad \frac{1}{(n-1)a^{n-1}}=C$$

und (2) — (3) liefert

$$4) \quad \frac{1}{(n-1)}\left(\frac{1}{(a-x)^{n-1}}-\frac{1}{a^{n-1}}\right)=kt.$$

Setzen wir z. B. $n=2$, so finden wir für die Reaktionskonstante k

$$5) \quad k=\frac{1}{t}\frac{x}{(a-x)a}.$$

Gl. (4) gilt für den Fall, dass $n>1$ ist; für den Fall $n=1$, dessen Integration zum Logarithmus führt, haben wir bereits S. 109 in der Zuckerinversion ein Beispiel kennen gelernt.

Wir wollen schliesslich noch den Fall, dass die Konzentrationen der reagierenden Molekülgattungen verschieden sind, an einem Beispiele behandeln. Es mögen zwei verschiedene Molekülgattungen aufeinander reagieren, deren Konzentrationen zur Zeit $t=0$ etwa a, bez. b sein mögen; dann ist nach dem eingangs erwähnten Satze die Reaktionsgeschwindigkeit zur Zeit t, nachdem sich x Moleküle von den beiden Substanzen umgesetzt haben und ihre Konzentrationen demgemäss auf $a-x$, bez. $b-x$ gesunken sind,

$$6) \quad \frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x).$$

Ordnen wir diese Gleichung zur Integration, so wird

$$\frac{dx}{(a-x)(b-x)} = k\,dt.$$

Der links stehende Ausdruck ist nicht ohne weiteres integrabel; zerlegen wir ihn aber nach S. 117 in Partialbrüche, so nimmt er die Form an

$$\frac{dx}{a-b}\left(\frac{1}{b-x} - \frac{1}{a-x}\right) = k\,dt,$$

welche Gleichung sich unmittelbar integrieren lässt (S. 104)

$$7) \quad -\frac{1}{a-b}\left[\ln(b-x) - \ln(a-x)\right] = kt + C.$$

Setzen wir hierin das durch die Anfangsbedingungen gegebene Wertepaar $x=0$ und $t=0$ ein, so wird

$$-\frac{1}{a-b}(\ln b - \ln a) = C$$

und durch Subtraktion folgt

$$8) \quad \frac{1}{(a-b)} \ln \frac{(a-x)\,.\,b}{(b-x)\,.\,a} = kt.$$

Diese Gleichung enthält z. B. die Theorie der Verseifung von Aethylacetat (oder einem andern Ester) durch Essigsäure (oder eine andere Säure).

Setzen wir in Gl. (8) $a=b$, so muss natürlich die Gl. (5) resultieren; wir stossen hier aber auf die eigentümliche Schwierigkeit, dass für $a=b$ der erste Faktor obigen Produktes den Wert $\frac{1}{0}$, also einen unendlich grossen Betrag, annimmt, während der Logarithmus den Wert ln 1, also den unendlich kleinen Betrag Null, erhält. Diese (scheinbare) Schwierigkeit wird erst in Kap. VII behoben werden.

§ 9. Verlauf unvollständiger Reaktionen.

Für den Fall, dass eine chemische, in einem homogenen Gasgemische oder in einer homogenen Lösung sich bei konstanter Temperatur abspielende Reaktion nicht bis zum völligen Aufbruch der reagierenden Substanzen verläuft, sondern früher Halt macht, besagt das Gesetz der chemischen Massenwirkung folgendes*): Die Reaktionsgeschwindigkeit ist in jedem Augenblick gleich dem Produkt der Konzentrationen der reagierenden, vermindert um das

*) Vgl. z. B. Nernst, Theoret. Chemie S. 430.

Produkt der Konzentrationen der sich bildenden Molekülgattungen, jedes Produkt multipliziert mit einem Proportionalitätsfaktor (den sog. Geschwindigkeitskonstanten).

In einer Formel ausgedrückt, nimmt obiges Gesetz die Gestalt an:

$$1) \quad \frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)(c-x)\ldots - k'(a'+x)(b'+x)\ldots;$$

darin ist x die Zahl der zur Zeit t umgesetzten Moleküle; $a, b, c \ldots$ sind die Anfangskonzentrationen (die also der Zeit $t=0$ entsprechen) der sich umsetzenden, $a', b' \ldots$ diejenigen der sich bildenden Molekülgattungen, k und k' die beiden Reaktionskoeffizienten.

Zur Zeit t sind demgemäss die Konzentrationen der sich umsetzenden Molekülgattungen $a-x$, $b-x$, $c-x$, ..., diejenigen der sich bildenden $a'+x$, $b'+x$, ...; stellen wir nach obiger Regel die Geschwindigkeitsgleichung auf, so resultiert Formel (1).

Gl. (1) ist stets integrierbar, indem nach S. 117 der Ausdruck

$$\frac{1}{k(a-x)(b-x)(c-x)\ldots - k'(a'+x)(b'+x)\ldots}$$

in Partialbrüche zerlegt werden kann. In Wirklichkeit liegt übrigens in allen bisher studierten Fällen die Sache stets aus dem Grunde sehr einfach, weil sowohl die Zahl der reagierenden, wie die der sich bildenden Molekülgattungen ziemlich klein ist, z. B. 1, 2, höchstens 3 beträgt. Wir können daher uns hier darauf beschränken, einige der bisher untersuchten speziellen Anwendungen der Gl. (1) zu besprechen.

Laktonbildung.*) Einzelne Säuren, wie z. B. Oxybuttersäure, bilden in wässeriger Lösung unter Wasserabspaltung ein Lakton (inneres Anhydrid); bezeichnet a die anfängliche Konzentration der Säure, a' diejenige des Laktons, so wird nach (1)

$$2) \quad \frac{dx}{dt} = k(a-x) - k'(a'+x)$$

oder umgeformt

$$\frac{dx}{(ka-k'a') - (k+k')x} = dt,$$

wovon das Integral

$$3) \quad -\frac{1}{k+k'}(\ln\left[(ka-k'a') - (k+k')x\right] = t + C$$

beträgt. Nun ist für $t=0$ auch $x=0$; somit wird

$$4) \quad -\frac{1}{k+k'}\ln(ka-k'a') = C$$

*) Vgl. darüber P. Henry, Zeitschr. f. physik. Chemie **10.** 96 (1892); Nernst, Theoret. Chemie S. 450.

und (3) — (4) liefert

$$5) \quad \ln \frac{ka - k'a'}{(ka - k'a') - (k + k')x} = (k + k')t.$$

Warten wir sehr lange Zeit, so stellt sich der Gleichgewichtszustand zwischen den reagierenden Stoffen her und zwar möge dann A die Konzentration der Säure, A' die des Laktons sein. Im Gleichgewichtszustand ist die Reaktionsgeschwindigkeit aber offenbar gleich Null, und es nimmt Gl. (2) die Form an

$$0 = kA - k'A'$$

oder

$$6) \quad K = \frac{k}{k'} = \frac{A'}{A};$$

K bezeichnet man als Gleichgewichtskonstante und kann, weil einer direkten experimentellen Bestimmung zugänglich, im gegebenen Falle als bekannt angesehen werden. Dividieren wir Zähler und Nenner des hinter dem Logarithmus stehenden Bruches der Gl. (5) durch k', so finden wir

$$7) \quad \frac{1}{t} \ln \frac{Ka - a'}{(Ka - a') - (1 + K)x} = k + k'.$$

In dieser Form kann die gefundene Beziehung direkt experimentell geprüft werden; bei einer gegebenen Versuchsreihe braucht man nur den auf der linken Seite stehenden Ausdruck zu berechnen und auf seine Konstanz zu prüfen. Um ein Zahlenbeispiel zu geben, so fand man für einen Versuch, bei dem die anfängliche Konzentration des Laktons $a' = 0$, diejenige der Säure $a = 18{,}23$ und bei dem

$$K = \frac{A'}{A} = \frac{13{,}28}{4{,}95} = 2{,}68$$

betrug, folgende zusammengehörige Werte für t und x:

t	x	$k + k' = \frac{1}{t} \ln \frac{Ka}{Ka - (1 + K)x}$
21	2,39	0,0350
50	4,98	0,0370
80	7,14	0,0392
120	8,88	0,0375
220	11,56	0,0371
320	12,57	0,0357
∞	13,28	—

Die Konstanz des in der letzten Kolumne befindlichen Ausdrucks ist durchaus zufriedenstellend und beweist schlagend die Richtigkeit der für obigen Fall entwickelten Theorie.

Esterbildung.*) Essigsäure (oder eine andere Säure) und Aethylalkohol (oder irgend ein anderer Alkohol) bilden Aethylacetat (oder einen andern entsprechenden Ester) und Wasser. Seien a und b die Konzentrationen der reagierenden, a' und b' die der entstehenden Substanzen, so nimmt Gl. (1) für diesen Fall die Gestalt an:

$$1) \quad \frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x) - k'(a'+x)(b'+x)$$

oder umgeformt

$$\frac{dx}{k(a-x)(b-x) - k'(a'+x)b'+x)} = dt.$$

Den Nenner des links stehenden Bruches können wir auf die Form bringen**)

$$(k-k')(x-\xi_1),(x-\xi_2),$$

wenn wir mit ξ_1 und ξ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung bezeichnen, die wir erhalten, wenn wir den ausmultiplizierten Nenner durch den Faktor von x^2 $(=k-k')$ dividieren. Die Integration läuft also auf diejenige des Ausdrucks

$$\frac{dx}{(x-\xi_1)(x-\xi_2)} \text{ oder } \frac{dx}{(\xi_1-x)(\xi_2-x)}$$

hinaus, die wir bereits S. 136 und 137 durchgeführt haben.

Die spezielle Rechnung wollen wir nun an einem einfacheren Beispiele anstellen, bei dem (entsprechend einem von Berthelot experimentell untersuchten und von Guldberg und Waage berechneten Falle)

$$a=1,\ b=1,\ a'=0,\ b'=0$$

war. Es wird dann

$$1) \quad \frac{dx}{dt} = k(1-x)^2 - k'x^2$$

oder umgeformt

$$\frac{dx}{x^2 - 2\frac{k}{k-k'}x + \frac{k}{k-k'}} = (k-k')\,dt.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{k}{k-k'} = m,$$

so sind die beiden Wurzeln ξ_1 und ξ_2 der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 2mx + m = 0,$$

$$2) \quad \xi_1 = m + \sqrt{m^2-m}, \quad \xi_2 = m - \sqrt{m^2-m}.$$

*) Guldberg und Waage, Journ. f. pr. Chemie [2] **19**. 69 (1879).

**) Vgl. § 6 der Formelsammlung.

Das Integral von

$$\frac{dx}{(x-\xi_1)(x-\xi_2)} = (k-k')\,dt$$

ist nun aber nach S. 137 (wo $\xi_1 = a$, $\xi_2 = b$ ist)

$$\frac{1}{\xi_1-\xi_2}\left[\ln(\xi_2-x) - \ln(\xi_1-x)\right] = (k-k')\,t + C$$

und da auch hier die Grenzbedingungen die gleichen sind, d. h. für $t=0$ auch $x=0$ ist, so wird

$$3)\quad \frac{1}{\xi_1-\xi_2}\ln\frac{(\xi_1-x)\,\xi_2}{(\xi_2-x)\,\xi_1} = (k-k')\,t.$$

Substituieren wir ξ_1 und ξ_2 nach der Gleichung (2), so wird

$$4)\quad \frac{1}{2\sqrt{m^2-m}}\ln\frac{(m+\sqrt{m^2-m}-x)(m-\sqrt{m^2-m})}{(m-\sqrt{m^2-m}-x)(m+\sqrt{m^2-m})} = (k-k')\,t.$$

Die Bestimmung des Gleichgewichtzustandes, d. h. desjenigen Zustandes des Reaktionsgemisches, der nach hinreichend langer Zeit eintritt, liefert den Zahlenwert von $\frac{k}{k'}$, d. h. auch den von

$$m = \frac{1}{1-\frac{k'}{k}}.$$

Für die Einwirkung von Essigsäure auf Aethylalkohol z. B. ist

$$\frac{k}{k'} = 4{,}00$$

und somit

$$m = \frac{4}{3} \text{ und } \sqrt{m^2-m} = \frac{2}{3}.$$

Setzen wir diese speziellen Werte in (4) ein, so finden wir

$$\frac{4}{3}(k-k') = \frac{1}{t}\ln\frac{2-x}{2-3x}.$$

Dies ist aber die von Guldberg und Waage bei Berechnung der Versuche Berthelots benutzte Gleichung.*)

Das auf den vorstehenden Seiten Besprochene dürfte für die mathematische Behandlung der Probleme der chemischen Kinetik ausreichend sein, wenigstens bei dem bisherigen Stande dieses Kapitels der theoretischen Chemie.

*) Vgl. Nernst, Theoret. Chemie S. 450.

Sechstes Kapitel.

Bestimmte Integrale.

§ 1. Die Fläche der Parabel.

Eine der wichtigsten Anwendungen der Integralrechnung ist die folgende.

Es sei die Aufgabe gestellt, die Fläche eines Parabelsegments zu berechnen und zwar (Fig. 41) desjenigen Segments, das von einer zur Axe der Parabel senkrechten Geraden PP' abgeschnitten wird. Dieses Segment wird durch die Axe in zwei gleiche Teile zerlegt. Ziehen wir noch im Scheitel O der Parabel die Tangente, und fällen von P das Loth PQ auf sie, so ist das gesuchte Segment S gleich der Differenz zwischen dem Rechteck aus OQ und PQ und dem Flächenstück OPQ, das von der Parabel und der Tangente begrenzt wird. Wir brauchen also nur das letztere zu bestimmen.

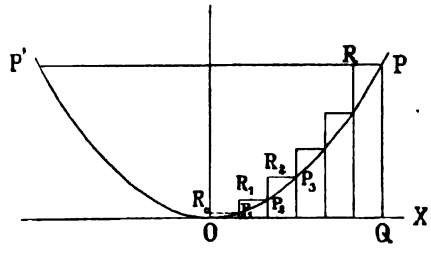


Fig. 41.

Wir knüpfen auch hier zunächst an ein Annäherungsverfahren an. Wir wählen die Tangente im Scheitel als x-Axe und teilen die Strecke OQ in lauter gleiche Teile von der Länge h, errichten in den Teilpunkten Lothe bis zur Parabel und ziehen durch die Endpunkte P_1, P_2, P_3 ... dieser Lothe Parallelen zur x-Axe; sie mögen je die vorhergehenden Lothe — für den Punkt P_1 ist dies die y-Axe — in den Punkten R_0, R_1, R_2, R_3 ... schneiden. Auf diese Weise entsteht die gradlinig begrenzte Figur

$$OR_0P_1R_1P_2R_2P_3 \ldots\ldots RPQ,$$

die das gesuchte Flächenstück umschliesst.

Für diese Figur können wir den Inhalt wie folgt ermitteln. Da die y-Axe die Symmetrieaxe der Parabel ist, so lautet ihre Gleichung (S. 10)

$$1) \quad x^2 = 2py, \text{ resp. } y = \frac{x^2}{2p}.$$

Sind x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3 .. xy die Koordinaten der Punkte P_1, P_2, P_3 .... P, so haben die einzelnen, zwischen je zwei Ordinaten liegenden kleinen Rechtecke den Inhalt

$$y_1h,\ y_2h,\ y_3h \ldots\ldots yh,$$

die Gesamtfläche ist daher

$$2) \quad \begin{aligned} \mathfrak{F} &= y_1h + y_2h + y_3h + \ldots + yh \\ &= h(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots + y). \end{aligned}$$

Sei jetzt n die Zahl der Teile auf OQ, so ist

$$3) \quad x_1 = h,\ x_2 = 2h,\ x_3 = 3h, \ldots\ldots x = nh,$$

also wird nach (1)

$$y_1 = \frac{h^2}{2p},\ y_2 = \frac{(2h)^2}{2p},\ y_3 = \frac{(3h)^2}{2p}, \ldots y = \frac{(nh)^2}{2p},$$

und wenn wir diese Werte oben einsetzen, so folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \frac{h}{2p}\left\{h^2 + 2^2h^2 + 3^2h^2 + \ldots + n^2h^2\right\} \\ &= \frac{h^3}{2p}\left\{1 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2\right\}. \end{aligned}$$

Für die Summe der ersten n-Quadrate gilt aber die Formel*)

$$4) \quad 1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{(n-1)\ n\ (2n-1)}{1.2.3},$$

also erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \frac{h^3}{2p}\frac{(n-1)\ n\ (2n-1)}{1.2.3} \\ &= \frac{(hn-h)\ hn\ (2hn-h)}{1.2.3.2p}. \end{aligned}$$

Nun ist aber (Gl. 3) $nh = x$, demnach wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \frac{(x-h)\ x\ (2x-h)}{1.2.3.2p} \\ &= \frac{2x^3 - 3hx^2 + h^2x}{1.2.3.2p} \end{aligned}$$

oder schliesslich

$$5) \quad \mathfrak{F} = \frac{x^3}{6p} - h\frac{x^2}{4p} + h^2\frac{x}{12p}.$$

*) Vgl. Formel 59 des Anhangs.

Das geradlinige Flächenstück kommt der von der Parabel begrenzten Fläche auch hier um so näher, je kleiner wir die Grösse h, je grösser also die Zahl n der Rechtecke nehmen. Der genaue Uebergang der ersten Fläche in die zweite tritt aber erst dann ein, wenn wir h den Wert Null erteilen, so dass die Zahl der Rechtecke unendlich gross wird. Diesen Uebergang können wir in seinem einzelnen Verlauf auch in diesem Fall begrifflich nicht mitmachen, denn das Bild eines Flächenstückes, das aus unendlich vielen Teilen von der Breite Null besteht, ist keine klare Vorstellung mehr, unsere Formel aber bleibt für ihn in Kraft; sie gestattet, dass wir $h = 0$ setzen und giebt in diesem Fall den wirklichen Wert des gesuchten Flächenstücks F, nämlich

$$6) \quad F = \frac{x^3}{6p}.$$

Der Flächeninhalt des Parabelsegments selbst ergiebt sich nun folgendermassen. Das Rechteck OQP hat die Seiten $OQ = x$ und $PQ = y$, wo y durch Gl. 1) bestimmt ist; folglich ist sein Inhalt

$$xy = \frac{x^3}{2p}.$$

Für die Fläche S des Parabelsegments, das von PP' und der y-Axe der Parabel begrenzt wird, erhalten wir daher

$$7) \quad S = \frac{x^3}{2p} - \frac{x^3}{6p} = \frac{x^3}{3p}$$

und demnach folgt noch aus Gl. 6)

$$8) \quad S = 2F.$$

Die Parabel teilt also das Rechteck in zwei Teile, von denen der eine das doppelte des andern ist.

Wir finden für die eben behandelte Aufgabe wiederum bestätigt, was wir in der Einleitung des zweiten Kapitels ausgeführt haben. An der entscheidenden Stelle, wo die Begriffe ihre Bestimmtheit verlieren und zu zerfliessen anfangen, verliert die Rechnung ihre Bestimmtheit nicht; sie leistet, was wir begrifflich nicht zu leisten vermögen. Die Formel ist uns in dieser Hinsicht überlegen. Analog liegen die Dinge in allen Fällen, in denen es sich darum handelt, den Wert einer Summe zu ermitteln, deren Summanden wir uns der Zahl nach ins Ungemessene wachsend und der Grösse nach gegen Null konvergierend denken müssen. Der Inhalt einer beliebig begrenzten Fläche, der Inhalt eines Körpers von variablem Querschnitt, die Gesamtmasse eines Körpers von variabler Dichtigkeit, die Summe aller anziehenden Kräfte, die von allen Teilen eines Körpers auf einen und denselben Punkt aus-

geübt werden, sind Beispiele, die derjenigen Klasse von Problemen angehören, die wir nach dem vorstehenden Verfahren zu behandeln haben.

Wir haben noch einige Bezeichnungen einzuführen. Für die in Gl. 2) auftretende Summe

$$y_1 h + y_2 h + y_3 h + \ldots .$$

hat man ein abkürzendes Zeichen eingeführt; man schreibt dafür

$$\Sigma(yh) \text{ oder } \Sigma yh,$$

wo Σ bedeutet, dass man aus yh eine Summe bilden soll, und zwar so, dass man für y der Reihe nach alle seine Werte $y_1, y_2, y_3 \ldots .$ setzt. Ferner wollen wir jetzt wieder h, die Differenz der Abscissen von zwei benachbarten Punkten der Parabel, durch Δx ersetzen, so erhalten wir

$$9) \quad \mathfrak{F} = \Sigma y \Delta x$$

als Ausdruck für die Summe aller Rechtecke.

Der Wert dieses Ausdrucks geht, wie wir wissen, in den Ausdruck für die Fläche F der Parabel über, wenn wir Δx gegen Null konvergieren lassen. Dies können wir an dem obigen Ausdruck formal nur dadurch kennzeichnen, dass wir analog wie in Kapitel II (S. 55)

$$10) \quad F = \operatorname*{limes}_{\Delta x = 0} \{\Sigma y \Delta x\}$$

schreiben. Von diesem Grenzwert werden wir nun nachweisen, dass er kein anderer ist, als das Integral

$$11) \quad \int y dx$$

oder genauer gesprochen, als einer der unendlich vielen Werte, die, wie wir wissen, dieses Integral besitzt. Ersetzen wir nämlich y in 11) durch seinen Wert gemäss Gl. 1), so ergiebt sich

$$\int y dx = \int \frac{x^2}{2p} dx = \frac{1}{2p} \int x^2 dx$$
$$= \frac{1}{2p} \frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{6p}$$

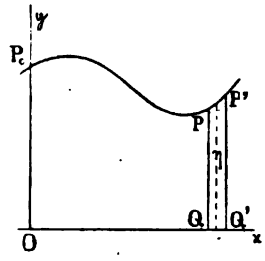
und dies ist in der That derselbe Wert, den wir in der Gl. 6) für die Fläche F gefunden haben.

§ 2. Die Fläche einer beliebigen Kurve.

Die vorstehenden Untersuchungen lassen sich ohne weiteres auf beliebige Kurven, resp. die von ihnen begrenzten Flächenstücke ausdehnen. Es sei

$$1) \quad y = f(x)$$

die Gleichung der nebenstehenden Kurve (Fig. 42). Wir nehmen an, die y-Axe habe eine solche Lage, dass sie die Kurve schneidet, wie es in der Figur auch wirklich der Fall ist, und stellen uns wiederum die Aufgabe, den Inhalt F desjenigen Flächenstücks zu berechnen, das von der x-Axe, der y-Axe, der Kurve und der Ordinate PQ begrenzt wird. Wir gehen von derselben Vorstellung aus, der wir im vorstehenden Beispiel gefolgt sind. Wir denken uns wiederum die Abscisse OQ in beliebig viele kleine Teile geteilt, die übrigens nicht notwendig gleich zu sein brauchen und die wir jetzt mit $h_1, h_2, h_3 \ldots$ bezeichnen. Dann denken wir uns in den Teilpunkten die Lothe, bis sie die Kurve in $P_1, P_2, P_3 \ldots$ treffen, und fassen wieder die geradlinig begrenzte Figur ins Auge, deren Inhalt dem des Flächenstücks nahe kommt. Diese Figur wird zum Teil über die Fläche der Kurve hinausragen, zum Teil aber auch gegen sie zurückbleiben; dies ist jedoch für das folgende ohne Belang. Nennen wir die Koordinaten von $P_1, P_2, P_3 \ldots$ wieder



Figur 42.

$$x_1 y_1,\ x_2 y_2,\ x_3 y_3 \ldots\ldots,$$

so ist der Inhalt $\mathcal{F}$ dieses Flächenstücks jetzt

$$2)\quad \mathcal{F} = h_1 y_1 + h_2 y_2 + h_3 y_3 \ldots\ldots$$

oder, wenn wir

$$3)\quad h_1 = x_1 - x_0 = \Delta x_1,\ h_2 = x_2 - x_1 = \Delta x_2 \ldots\ldots$$

setzen,

$$\mathcal{F} = y_1 \Delta x_1 + y_2 \Delta x_2 + \ldots.$$

und wenn wir das abkürzende Zeichen Σ anwenden,

$$4)\quad \mathcal{F} = \Sigma y h = \Sigma y \Delta x.$$

Von dieser Summe wissen wir, dass sie, wenn wir alle h, resp. alle Grössen Δx gegen Null konvergieren lassen, den Inhalt des Flächenstückes darstellt. Sie hat also einen bestimmten Grenzwert; wir werden beweisen, dass er durch einen der Werte des Integrals

$$5)\quad \int y\,dx = \int f(x)\,dx$$

dargestellt wird. Mit anderen Worten, es wird behauptet, dass der Wert der Fläche F eine Integralfunktion von $f(x)$ ist.

Der Wert der Fläche F hängt von der sie begrenzenden Ordinate, resp. von der Abscisse x des Punktes P ab und ist daher jedenfalls eine Funktion von x, die wir kurz durch $F(x)$ bezeichnen wollen.

Soll nun diese Funktion gleich dem obigen Integral sein, d. h. soll die Gleichung

$$6) \quad F(x) = \int y\, d(x) = \int f(x)\, dx$$

wirklich richtig sein, so muss nach der Definition der Integralfunktion (S. 101) der Differentialquotient der Fläche F, resp. der Funktion $F(x)$, die ihren Inhalt ausdrückt, gleich $f(x)$ sein, d. h. es muss die Gleichung

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

bestehen. Diese Gleichung haben wir zu erweisen.

Um den Differentialquotienten von $F(x)$ zu erhalten, haben wir den Grenzwert von

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

zu bilden. Wir bezeichnen den Punkt der Kurve, der zu der Abscisse $x+h = OQ'$ gehört, durch P', so ist nach unseren Bezeichnungen

$$F(x+h) = OP_0P'Q'$$
$$F(x) = OP_0PQ$$

und demnach folgt

$$F(x+h) - F(x) = PQP'Q'.$$

Nun giebt es jedenfalls einen Punkt zwischen P und P', mit den Koordinaten ξ, η, so dass das Flächenstück $PQP'Q'$ gleich dem Rechteck mit der Grundlinie $QQ' = h$ und der Höhe $\eta = f(\xi)$ ist, d. h. es ist

$$F(x+h) - F(x) = h\eta = hf(\xi)$$

und daraus folgt

$$7) \quad \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi).$$

Lassen wir nun h gegen Null konvergieren, so fällt P' mit P zusammen, also fällt auch der Punkt mit den Koordinaten ξ und η, der immer zwischen P und P' liegt, mit P zusammen, d. h. es wird $\xi = x$ und es folgt

$$8) \quad \lim_{h=0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

oder in anderer Schreibweise

$$9) \quad \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

und damit ist der Beweis für unsere Behauptung erbracht. Schreiben wir noch die letzte Gleichung in die Form

$$10) \quad dF(x) = f(x)\, dx = y\, dx,$$

so können wir das Ergebnis unserer Entwicklungen dahin interpretieren, dass das Differential der Fläche $F(x)$ den Wert ydx hat und durch eines der unendlich kleinen Rechtecke dargestellt wird, in die wir durch Ziehen von parallelen Ordinaten die Fläche zerlegen können.

Denken wir nun daran, dass die Fläche $F(x)$ der Grenzwert der Summe war, von der wir gemäss Gl. 4) ausgingen, so erhalten wir

$$11) \quad F(x) = \int ydx = \text{limes}\{\Sigma y \Delta x\}$$

und diese Gleichung besagt einfach, dass das Integral des Differentials ydx nichts anderes ist, als die Summe dieser Differentiale, resp. als der Grenzwert dieser Summe, wenn die Differentiale unendlich klein werden. Hieran hat sich die Bezeichnungsart des Integrals angeknüpft. Das bereits von Leibniz eingeführte Zeichen $\int$ soll nämlich ein langgezogenes s bedeuten, um die Summe anzudeuten, und ydx stellt dasjenige kleine Flächenstück dar, das in seinen verschiedenen Werten die einzelnen Summanden liefert.

Hiermit sind wir zu einem der wichtigsten, wenn auch bei näherer Betrachtung durchaus selbstverständlichen Resultate gelangt. Wir sehen, dass die Beziehungen zwischen Differentialrechnung und Integralrechnung darauf hinauslaufen, jede Funktion als Summe ihrer elementaren Teile, d. h. ihrer Differentiale aufzufassen. So evident dies ist, so wichtige Anwendungen werden wir davon machen.

Es liegt nahe zu fragen, wie die geometrische Interpretation des Integrals zu den unendlich vielen Werten desselben führt.

Dies ergiebt sich unmittelbar aus der Erwägung, dass das Integral dasjenige Flächenstück darstellt, deren eine Grenzlinie die y-Axe ist, dass wir aber diese Axe beliebig gewählt haben. Man sieht daraus sofort, wie die geometrische Auffassung sehr einfach zu den unendlich vielen Werten des Integrals führt, und erkennt überdies leicht, dass sich zwei Integralfunktionen für gleiche Werte von x nur um eine Konstante unterscheiden können, nämlich um dasjenige Flächenstück, das zwischen den bezüglichen beiden y-Axen liegt.

§ 3. Das bestimmte Integral.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, ein solches Flächenstück zu bestimmen, das zwischen irgend zwei Ordinaten $P_1Q_1 = b_1$ und $P_2Q_2 = b_2$ einer Kurve liegt (Figur 43). Diese Ordinaten denken wir uns in ganz beliebiger Lage, die zugehörigen Abscissen seien a_1 und a_2. Die von ihnen begrenzte Fläche F ist augenscheinlich die Differenz

zwischen denjenigen Flächenstücken, die einerseits von der y-Axe, andererseits von P_2Q_2 resp. P_1Q_1 begrenzt werden. Deren Werte sind aber $F(a_2)$ bezüglich $F(a_1)$, d. h. wir erhalten

$$1) \quad F = F(a_2) - F(a_1).$$

Hierfür hat man folgende Bezeichnung eingeführt; man schreibt

$$2) \quad F = \int_{a_1}^{a_2} y\,dx,$$

so dass man unter dem rechtsstehenden Zeichen die Differenz $F(a_2) - F(a_1)$ versteht, d. h. also

$$3) \quad \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx = F(a_2) - F(a_1).$$

Man nennt das bezügliche Integral ein bestimmtes Integral; a_2 heisst seine obere, a_1 seine untere Grenze.

Beispielsweise haben wir im Fall der Parabel

$$F(x) = \frac{x^3}{6p},$$

daher ist, wenn wir den begrenzenden Punkten P_1 und P_2 wieder a_1 und a_2 als Abscissen beilegen,

$$P_1Q_1\,P_2Q_2 = \int_{a_1}^{a_2} y\,dx = \frac{a_2^3}{6p} - \frac{a_1^3}{6p}.$$

Da ein bestimmtes Integral den Inhalt eines zwischen bestimmten Grenzen liegenden Flächenstücks angiebt, so ist sein Wert naturgemäss eine bestimmte Zahl. Sie muss daher davon unabhängig sein, welchen Wert des Integrals wir unter $F(x)$ verstehen, d. h. an welche Stelle wir die y-Axe gelegt haben. Dies ist in der That der Fall, wie aus der obigen Ableitung unmittelbar hervorgeht.

Endlich ist noch zu erwähnen, dass man im Gegensatz zum bestimmten Integral die Integralfunktion $F(x)$ selbst als das unbestimmte Integral bezeichnet und dass man die Gleichung auch folgendermassen schreibt

$$4) \quad \int_{a_1}^{a_2} y\,dx = \Big|_{a_1}^{a_2} F(x),$$

wo die rechte Seite nichts anderes bedeutet als die Differenz $F(a_2) - F(a_1)$.

Wollen wir dies in Worte fassen, so können wir sagen, dass der Wert eines bestimmten Integrals gleich der Differenz derjenigen Werte ist, welche die Integralfunktion für die obere resp. untere Grenze des bestimmten Integrals besitzt.

§ 4. Die Fläche der Ellipse und Hyperbel.

Um hierzu ein Beispiel zu geben, wollen wir die Fläche der Ellipse berechnen. Wir legen die Axen wie gewöhnlich, so dass die Gleichung der Ellipse

$$1) \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ist. Der Inhalt des Flächenstücks $P_1Q_1P_2Q_2$ (Fig. 43) ist

$$2) \quad P_1Q_1P_2Q_2 = \int_{a_1}^{a_2} y\,dx.$$

Wenn wir aus der Ellipsengleichung y berechnen, so folgt

$$3) \quad y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

und wenn wir diesen Wert in das Integral einsetzen, so erhalten wir unter dem Integralzeichen eine Wurzel, wofür unsere Formeln nicht ausreichen. Dies können wir folgendermassen umgehen. Wir zeigen zunächst, dass man für jeden Punkt der Ellipse

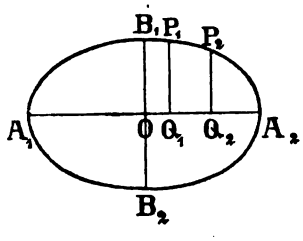


Fig. 43.

$$4) \quad x = a\cos\varphi$$
$$y = b\sin\varphi$$

setzen darf, wo φ folgender Winkel ist. Zeichnet man über der grossen Axe als Durchmesser den Kreis und verlängert PQ bis zum Schnittpunkt P' mit ihm (Fig. 44), so ist $\varphi = P'OQ$. Nämlich es ist im Dreieck $P'OQ$

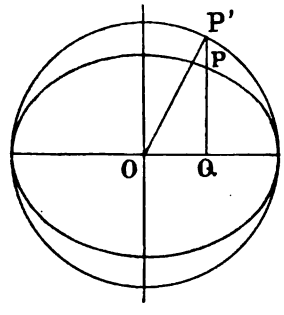


Fig. 44.

$$x = a\cos\varphi$$

und wenn man diesen Wert in die Gleichung 3) einsetzt, so findet man

$$y = b\sqrt{1-\cos^2\varphi} = b\sin\varphi\ ^*),$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

Wir haben zunächst den Wert des unbestimmten Integrals 2) zu ermitteln. Aus Gleichung 4) folgt durch Differentiation

$$dx = -a\sin\varphi\,d\varphi$$

also wird

$$5) \quad \int y\,dx = -\int ab\sin^2\varphi\,d\varphi = -ab\int\sin^2\varphi\,d\varphi.$$

*) Vgl. Formel 33 des Anhangs.

Nun haben wir aber*)

$$\sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2},$$

also folgt weiter

$$\int y\,dx = -\frac{ab}{2}\int(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi$$
$$= -\frac{ab}{2}\int d\varphi + \frac{ab}{2}\int \cos 2\varphi\,d\varphi.$$

Setzen wir im zweiten Integral

$$2\varphi = \vartheta,\ 2\varphi\,d\varphi = d\vartheta,$$

so ergiebt sich (S. 104)

$$\int \cos 2\varphi\,d\varphi = \int \frac{\cos\vartheta\,d\vartheta}{2} = \tfrac{1}{2}\sin\vartheta$$
$$= \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi$$

und demnach

$$\int y\,dx = -\frac{ab}{2}\varphi + \frac{ab}{4}\sin 2\varphi.$$

Aus dem so gefundenen Wert des unbestimmten Integrals haben wir durch Einsetzen der Grenzen den Wert des bestimmten Integrals abzuleiten.

Die Grenzen waren ursprünglich a_2 und a_1; inzwischen haben wir als neue Variabele φ eingeführt und haben daher φ_2 und φ_1 als Werte von φ, die den Punkten P_2 und P_1 entsprechen. Wir finden demnach für den Inhalt E der Ellipsenfläche $P_1Q_1P_2Q_2$

$$7)\quad E = \left|\left\{-\frac{ab}{2}\varphi + \frac{ab}{4}\sin 2\varphi\right\}\right|_{\varphi_1}^{\varphi_2}$$

und wenn wir jetzt die Grenzen einsetzen,

$$8)\quad \begin{aligned} E &= -\frac{ab}{2}(\varphi_2-\varphi_1) - \frac{ab}{4}(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) \\ &= \frac{ab}{2}(\varphi_1-\varphi_2) - \frac{ab}{4}(\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2). \end{aligned}$$

Im besondern finden wir für den Ellipsenquadranten — es fällt P_2 auf A_2 und P_1 auf B_1 —, dass

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2},\ \varphi_2 = 0$$

ist, und demgemäss folgt für seinen Inhalt E_q

$$9)\quad E_q = \frac{ab}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{ab}{4}\pi.$$

Der Inhalt der ganzen Ellipse ist daher gleich $ab\pi$.

*) Vgl. Formel 39a des Anhangs.

Diese Formel hat eine nahe Beziehung zu der Formel für die Kreisfläche. Der über der grossen Axe $2a$ der Ellipse stehende Kreis hat den Inhalt $a^2\pi$; aus ihm entsteht der Inhalt der Ellipse, wenn wir den einen Faktor a durch die kleine Halbaxe b der Ellipse ersetzen. Dies entspricht dem Umstande, dass auch jede Ordinate der Ellipse gegen diejenige Kreisordinate, die zu demselben Abscissenwert gehört, im Verhältnis $b:a$ verkleinert ist. (Vgl. S. 23.)

Die Hyperbelfläche soll nur für den besondern Fall bestimmt werden, dass die Hyperbel gleichseitig ist. (Fig. 45.) Wir denken sie uns in diesem Fall auf die Asymptoten als Axen bezogen, so dass ihre Gleichung (S. 29)

$$10) \quad xy = a$$

st. Das Flächendiffe- .r .ial hat daher den Wert

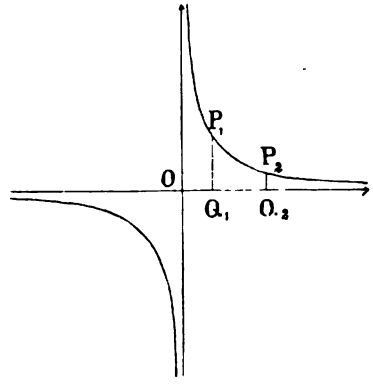


Fig. 45.

$$dF = y\,dx = \frac{a}{x}\,dx$$

und daraus folgt für den Inhalt H desjenigen Flächenstücks, das von zwei Ordinaten y_2 und y_1 begrenzt wird, deren Abscissen x_1 und x_2 sind,

$$H = \int_{x_1}^{x_2} \frac{a}{x}\,dx = a \Big|_{x_1}^{x_2} \ln x$$

und hieraus

$$11) \quad H = a(\ln x_2 - \ln x_1) = a \ln \frac{x_2}{x_1}.$$

Durch diese einfache Formel wird der Inhalt des Flächenstücks dargestellt. Nehmen wir als untere Grenze im besondern denjenigen Punkt, dessen Abscisse $x_1 = 1$ ist, so erhalten wir, wenn wir jetzt noch die obere Grenze durch x bezeichnen

$$12) \quad H = a \ln x$$

für den bezüglichen Inhalt. Wegen dieser Beziehung der Hyperbelfläche zu den natürlichen Logarithmen werden diese gelegentlich auch als hyperbolische Logarithmen bezeichnet.

§ 5. Der Inhalt der Kugel und des Rotationsparaboloids.

Um den Inhalt eines Körpers, z. B. einer Kugel zu berechnen, denkt man sich den Körper durch parallele Ebenen genau so in lauter elementare (d. h. differentielle) Bestandteile zerlegt, wie die Fläche durch die Ordinaten in lauter differentielle Flächenstücke. Für ein solches

kleines Körperdifferential kann man angenähert ebenso ein Prisma substituieren, wie für die kleinen Flächenstücke ein Rechteck; in der That geht die Summe aller diesbezüglichen Prismen, wenn man ihre Höhen gegen Null konvergieren lässt, in das Körpervolumen über. Dies entspricht ganz der Art, wie man geographische Reliefbilder durch Aufeinanderlegen geeignet geschnittener Blätter mit allergrösster Genauigkeit darstellen kann.

Wir bezeichnen das Volumen des Körpers durch V; das zwischen zwei unendlich nahen Ebenen liegende kleine Körpervolumen, welches das Differential des ganzen Volumens darstellt, ist daher durch dV zu bezeichnen.

Wenn wir seine Grundfläche g nennen und seine Höhe, die das Differential der ganzen Höhe h ist, dh, so ergiebt sich

$$1) \quad dV = g\,dh,$$

woraus sich durch Integration das Volumen selber finden lässt; wir erhalten also die Formel

$$2) \quad V = \int g\,dh.$$

Im Fall der Kugel ist die Grundfläche, die durch eine Schnittebene in der Höhe h bestimmt wird, wenn wir ihren Radius mit ρ bezeichnen (Fig. 46)

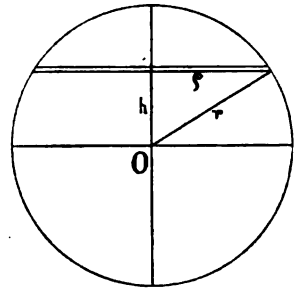


Fig. 46.

$$g = \rho^2\pi.$$

Andrerseits ist

$$\rho^2 = r^2 - h^2,$$

wo r der Kugelradius ist, also ergiebt sich

$$3) \quad dV = (r^2 - h^2)\,\pi\,dh$$

und für das Volumen der Kugel erhalten wir

$$4) \quad V = \int_{-r}^{+r} (r^2 - h^2)\,\pi\,dh.$$

Für das unbestimmte Integral finden wir

$$\int (r^2 - h^2)\,\pi\,dh = \pi\left\{\int r^2\,dh - \int h^2\,dh\right\}$$
$$= \pi\left(r^2 h - \frac{h^3}{3}\right)$$

und wenn wir für h die Grenzen einsetzen, nämlich als obere r, als untere $-r$, so kommt für die Kugel K

$$5) \quad K = \Big|_{-r}^{r} \pi\left(r^2 h - \frac{h^3}{3}\right)$$

und daher

$$K = \pi\left\{\left(r^2 - \frac{r^2}{3}\right) + \left(r^2 - \frac{r^2}{3}\right)\right\}$$

oder auch

$$6) \quad K = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

In ähnlicher Weise kann man den Inhalt aller Rotationskörper berechnen. Wir bestimmen noch den Inhalt eines Körpers, der von einer Fläche begrenzt ist, die durch Rotation einer Parabel um ihre Axe entsteht. Ein gewöhnlicher parabolischer Hohlspiegel stellt eine solche Fläche dar; sie heisst Rotationsparaboloid. Die Koordinatenaxen der Parabel denken wir uns genau so gelegt, wie auf S. 144; die Höhe des parabolischen Segments sei h. Das Differential des Volumens in der Höhe y ist wieder ein unendlich dünner gerader Kreiscylinder; sein Radius ist x und seine Höhe ist dy, also folgt

$$7) \quad dV = x^2\pi\, dy.$$

Nun lautet die Gleichung der Parabel (S. 10)

$$x^2 = 2py,$$

also ergiebt sich durch Einsetzen

$$dV = 2py\pi dy$$

und daraus

$$8) \quad V = \int_0^h 2p\pi y dy = \Big|_0^h y^2 p\pi;$$

$$9) \quad V = h^2 p\pi.$$

Das Volumen ist also, wie die Formel lehrt, gleich dem eines geraden Cylinders vom Radius h und der Höhe p. Sämtliche derartigen Segmente lassen sich also durch Cylinder vom Radius y, aber von konstanter Höhe darstellen.

§ 6. Rechnungsregeln für bestimmte Integrale.

Da die bestimmten Integrale als Grenzwerte von Summen definiert sind, und ihrer Bedeutung nach Flächen, Volumina u. s. w. darstellen, so gestatten sie die Anwendung folgender Rechnungsregeln. Man kann eine Fläche in Teile zerlegen, und die Aufgabe, die Fläche auszuwerten, dadurch lösen, dass man den Inhalt der einzelnen Teilstücke bestimmt. Ferner kann man die Berechnung einer Summe durch die Berechnung einzelner Teilsummen leisten, in die man die Gesamtsumme zerlegt. Aus diesem selbstverständlichen Prinzip fliessen einige Sätze

über bestimmte Integrale, die, da sie allgemein als Sätze ausgesprochen zu werden pflegen, auch hier eine Stelle finden mögen.

Sind die Grenzen eines Integrals a und b, die eines zweiten b und c, so ist

$$1) \quad \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx,$$

was in der That nur aussagt, dass die Fläche von a bis c gleich der Summe der Flächen von a bis b und von b bis c ist. Dasselbe gilt naturgemäss für eine Summe von mehr als zwei derartigen Integralen.

Ein zweiter Satz ist der folgende. Nach der Definition des bestimmten Integrals ist

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx = \text{limes}\, \Sigma f(x)\,\Delta x,$$

so dass die sämtlichen Δx die Strecke vom Endpunkt der Abscisse a_1 bis zu demjenigen der Abscisse a_2 erfüllen, so dass also die Summe aller Δx gleich $a_2 - a_1$ ist. In gleicher Weise ist das bestimmte Integral

$$\int_{a_2}^{a_1} f(x)\,dx,$$

für das jetzt a_1 die obere, a_2 die untere Grenze ist, einem solchen Grenzwert gleich, nur mit dem Unterschied, dass jetzt die Summe aller Δx gleich $a_1 - a_2$ sein muss, so dass alle Δx mit entgegengesetztem Vorzeichen, wie beim ersten Integral, zu nehmen sind. Es haben daher auch beide Integrale entgegengesetzt gleiche Werte, d. h,

$$2) \quad \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx = -\int_{a_2}^{a_1} f(x)\,dx.$$

Das bestimmte Integral ändert also sein Vorzeichen, wenn man die Grenzen mit einander vertauscht.

Dieser Satz ist nichts anderes als ein besonderer Fall des allgemeinen mathematischen Prinzips, dass sich der Gegensatz von positiv und negativ geometrisch durch den Gegensatz der Richtung, hier der Integrationsrichtung, ausdrückt; unter Integrationsrichtung ist dabei die Richtung verstanden, in der sich die unabhängige Variable x ändert.

Eine Anwendung hiervon ist folgende. Für die Gleichung 1) haben wir naturgemäss vorausgesetzt, dass die Abscissen a, b, c der Grösse nach auf einander folgen. Sie gilt aber auch, wenn dies nicht der Fall ist. Ist z. B. $a < c < b$, so ergiebt sich nach Gleichung 1) zunächst

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Aber jetzt ist

$$\int_c^b f(x)\,dx = -\int_b^c f(x)\,dx;$$

subtrahieren wir beide Gleichungen von einander, so folgt

$$3)\quad \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx,$$

also besteht in der That Gleichung 1) auch für diesen Fall.

§ 7. Bestimmte und unbestimmte Integrale.

Der oben (S. 149) besprochene Zusammenhang des bestimmten und unbestimmten Integrals lässt erkennen, dass der Vorzug des Rechnens mit bestimmten Integralen darin besteht, dass in ihnen eine noch unbekannte Integrationskonstante nicht auftritt; wie wir im Folgenden erörtern wollen, wird dies dadurch erreicht, dass man die Konstante durch Einführung der unteren Grenze des Integrals von vornherein überflüssig macht. Hieraus wird man sofort das Ergebnis entnehmen können, dass man sich bei der Lösung der Aufgaben, die wir mittelst unbestimmter Integration behandelt haben, von vornherein der bestimmten Integrale bedienen kann. Dies lässt sich folgendermassen erhärten.

Zunächst erinnern wir daran, dass sich, wenn das unbestimmte Integral

$$1)\quad \int f(x)\,dx = F(x)$$

ist, als Gleichung für das bestimmte Integral die folgende ergiebt

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1).$$

Bezeichnen wir noch $F(x)$ kurz durch u, so können wir diese Gleichung auch

$$2)\quad u_2 - u_1 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

schreiben, wo also u_1 und u_2 die Werte sind, die x_1 und x_2 entsprechen; überdies besteht noch, wie aus Gl. 1) durch Differenzieren folgt, die Gleichung

$$3)\quad du = f(x)\,dx.$$

Umgekehrt gelangen wir also durch Integration der Gl. 3) sofort zur Gl. 2) mit bestimmtem Integral.

Für die Zuckerinversion z. B. hatten wir die Gleichung (S. 99)

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x),$$

woraus sich

$$dt = \frac{dx}{k(a - x)}$$

ergab. Entsprechen nun den Werten x_1 und x_2 die Werte t_1 und t_2, so erhalten wir sofort

$$t_2 - t_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{k(a - x)} = \frac{1}{k} \Big|_{x_1}^{x_2} \ln \frac{1}{a - x}$$
$$= \frac{1}{k} \ln \frac{(a - x_1)}{(a - x_2)}.$$

Die Anziehung eines homogenen Stabes auf einen Punkt m, der mit ihm in einer Geraden liegt, hatten wir folgendermassen bestimmt. Die Anziehung des Linienelements dx auf den Punkt m war (S. 126)

$$dF = \frac{mM dx}{(a + x)^2}$$

und daraus ergiebt sich, da für den Anfangspunkt des Stabes $x = 0$, für den Endpunkt $x = l$ ist,

$$F = \int_0^l \frac{mM dx}{(a + x)^2} = \Big|_0^l - \frac{mM}{a + x} = mM\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a + l}\right),$$

wie wir es nach der Methode der unbestimmten Integration bereits in Gl. 4) S. 127 gefunden haben. Das bestimmte Integral

$$F = \int_0^b \frac{mM dx}{(a + x)^2}$$

liefert uns, wie S. 149 allgemein gezeigt ist, die Gesamtanziehung des Stabes als die Summe der Anziehungen, die von den einzelnen kleinen Stückchen desselben ausgehen.

Nach dem Vorstehenden ist wohl ohne weiteres klar, dass wir die Erhebung h über der Erdoberfläche (S. 128), die dem Luftdruck y entspricht, als das bestimmte Integral

$$h = -\int_B^y \frac{B}{S}\frac{dy}{y} = \frac{B}{S}\ln\frac{B}{y}$$

aufzufassen haben, dass ferner (S. 129) die Zeit, die zur Abkühlung von der Temperatur ϑ_1 zur Temperatur ϑ nötig ist, durch das bestimmte Integral

$$t = -\int_{\vartheta_1}^{\vartheta} \frac{mc}{k}\frac{d\vartheta}{\vartheta - \vartheta_0} = \frac{mc}{k}\ln\frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{\vartheta - \vartheta_0}$$

gegeben ist u. s. w.

Je nach Umständen ist die eine oder die andere Rechnungsmethode bequemer und anschaulicher, stets aber führt, richtig angewandt, jede der beiden (im Prinzip ja wenig verschiedenen) Integrationsmethoden zum Ziele.

§ 8. Mehrfache Integrale.

Die Fläche des Ellipsenquadranten haben wir nach S. 151 durch das bestimmte Integral

$$E = \int_0^a dx \,.\, y$$

auszudrücken; darin war ydx der Wert des Flächendifferentials, d. h. des unendlich kleinen Streifens, der von zwei benachbarten Ordinaten begrenzt wird und die Breite dx besitzt. Ersetzen wir in vorstehender Gleichung y durch $\int_0^y dy$ (S. 103), so erhalten wir

$$E = \int_0^a dx \int_0^y dy,$$

wofür man auch

$$1) \quad E = \int_0^a \int_0^y dx\, dy$$

schreibt. Das so umgeformte Integral heisst Doppelintegral.

Wir können uns seine geometrische Bedeutung unabhängig von der vorstehenden Ableitung folgendermassen zurechtlegen. Das Produkt $dx\,dy$ stellt den Inhalt eines unendlich kleinen Rechtecks mit den Seiten dx und dy dar; zerlegen wir die Ellipse durch Parallelen zu den Axen in lauter solche Rechtecke und bilden dann wieder ihre Summe resp. ihr Integral, so erhalten wir die Ellipsenfläche. Diese Integration führt man so aus, dass man erst nach einer Variabeln, z. B. nach y, integriert, d. h. man bildet die Summe aller solchen

Rechtecke, die einen zur y-Axe parallelen Flächenstreifen ausmachen; die untere Grenze dieser Integration ist 0, während die obere für jeden Flächenstreifen das zu ihm gehörige y ist, das seine Höhe angiebt. Dann hat man noch die Summe aller dieser Flächenstreifen zu nehmen; die Grenzen dieser Integration sind 0 und a. Analytisch drückt sich dies so aus. Da bei der Integration nach y die Grundlinie dx aller bezüglichen Rechtecke dieselbe Länge hat, also eine Konstante ist, so wird (S. 110)

$$2) \quad E = \int_0^a \int_0^y dx\,dy = \int_0^a dx \int_0^y dy$$

$$= \int_0^a dx \,.\, y,$$

womit bereits die erste Integration ausgeführt ist; die zweite, die der Summierung aller Flächenstreifen entspricht, ist wieder die nämliche, wie oben (S. 151).

Man kann die Integration auch so ausführen, dass man zunächst nach x integriert, und dann nach y. Wir bestimmen demgemäss erst die Summe aller Rechtecke, die einen zur x-Axe parallelen Streifen bilden, d. h. wir integrieren zwischen den Grenzen 0 und x (wobei jetzt dy einen konstanten Wert hat); dann bilden wir die Summe aller dieser zur x-Axe parallelen Flächenstreifen zwischen den Grenzen 0 und b. In diesem Fall haben wir also zunächst

$$3) \quad E = \int_0^b \int_0^x dx\,dy = \int_0^b dy \int_0^x dx = \int_0^b dy \,.\, x$$

und das so erhaltene Integral würde ganz analog, wie das oben (S. 151) betrachtete, zu behandeln sein.

Man bezeichnet das unendlich kleine Rechteck mit dem Inhalt $dx\,dy$ auch als Flächenelement.

Ein zweites Beispiel sei das folgende. Man soll die Gesamtmasse eines Rechtecks bestimmen, wenn seine Masse proportional dem Abstand von der Grundlinie zunimmt.

Wir legen das Koordinatensystem in eine Ecke des Rechtecks; ist a die Länge der Grundlinie und h die Höhe, so sind die Grenzen für x resp. 0 und a, für y resp. 0 und h. Ist die Masse für die Einheit der Fläche μ, so ist die Masse des unendlich kleinen Rechtecks

$$\mu \,.\, dx\,dy.$$

Nun ist aber μ proportional zu y, d. h. es ist $\mu = \alpha y$, wo α die Masse in der Höhe 1 angiebt. Demnach folgt als Gesamtmasse des Rechtecks

$$4) \quad M = \int_0^a \int_0^h \alpha y \, dx \, dy.$$

Wir integrieren zunächst nach y und erhalten

$$M = \int_0^a dx \Big| \alpha \frac{y^2}{2} = \int_0^a dx \,.\, \alpha \frac{h^2}{2}$$

und daraus folgt nach weiterer Integration

$$5) \quad M = \alpha \frac{ah^2}{2}.$$

Für den Inhalt eines Körpers erhält man in ähnlicher Weise ein dreifaches Integral. Man denkt sich den Körper längs dreier zu einander senkrechten Richtungen, die wir mit x, y, z bezeichnen wollen, in lauter unendlich kleine Parallelepipeda zerlegt; man nennt sie Körperelemente oder Volumelemente. Der Inhalt eines solchen ist dann $dx\,dy\,dz$. Der Inhalt des gesamten Körpers entsteht durch Integration dieser Elemente nach den drei Richtungen x, y, z. Die erste Integration parallel zu x giebt den Inhalt eines unendlich dünnen Streifens, durch Integration solcher Streifen längs y ergiebt sich der Inhalt eines unendlich dünnen Flächenstücks und die dritte Integration längs z giebt als Summe aller dieser Flächenstücke den Inhalt des Körpers.

Ein derartiges dreifaches Integral schreibt man

$$6) \quad \iiint dx \, dy \, dz,$$

die Grenzen hängen in jedem Fall von der Form des Körpers ab.

Als weiteres Beispiel wollen wir die Anziehung zweier sehr dünner Stäbe betrachten, die in einer Geraden gelegen sind und deren einander zugekehrte Enden den Abstand b besitzen. Auf S. 127 haben wir bereits die Anziehung eines Stabes auf einen in seiner Verlängerung gelegenen Massenpunkt bestimmt und dafür den Ausdruck

$$7) \quad F = \int_0^l \frac{mM}{(a+x)^2} dx = mM\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l}\right)$$

gefunden, wo a die Entfernung des Punktes vom Ende des Stabes bedeutet. Jetzt können wir offenbar ein sehr kurzes Stückchen dy

des zweiten Stabes wie einen Massenpunkt behandeln, in welchem wir uns seine Masse

$$m = M' dy$$

konzentriert denken, worin M' (analog M) die Masse der Längeneinheit des zweiten Stabes bedeutet. Die Anziehung des Stabes auf das Stück dy ist daher

$$8) \quad dA = \int_0^l \frac{M' M \, dy \, dx}{(b+y+x)^2},$$

weil die Entfernung des Stückes dy vom Ende des zweiten Stabes $b+y$ beträgt. Wir erhalten daher für die gesamte Anziehung der beiden Stäbe

$$9) \quad A = \int_0^{l'} \int_0^l \frac{M' M \, dy \, dx}{(b+y+x)^2},$$

wo l' die Länge des zweiten Stabes bedeutet. Indem wir nunmehr zuerst nach x integrieren und beachten, dass jetzt dy und y einen konstanten Wert haben, erhalten wir auf Grund der Formel 7), worin nur a durch $b+y$ zu ersetzen ist,

$$A = \int_0^{l'} M' M \left(\frac{1}{b+y} - \frac{1}{b+y+l} \right) dy$$

und indem wir nunmehr die zweite Integration (nach y) vornehmen, finden wir

$$A = MM' \left[\ln \frac{b+l'}{b} - \ln \frac{b+l+l'}{b+l} \right]$$

oder schliesslich

$$A = MM' \ln \frac{(b+l)(b+l')}{b(b+l+l')}.$$

Siebentes Kapitel.

Die höheren Differentialquotienten und die Funktionen mehrerer Variabeln.

§ 1. Definition der höheren Differentialquotienten und Ableitungen.

Für die Funktion

$$1) \quad y = \sin x$$

hat der Differentialquotient den Wert

$$2) \quad y' = \frac{dy}{dx} = \cos x.$$

Dieser Differentialquotient ist ebenfalls eine Funktion von x; man bezeichnet ihn in diesem Sinn auch als Ableitung; Ableitung und Differentialquotient sind also gleichbedeutende Bezeichnungen derselben Funktion. Von ihr kann man wiederum den Differentialquotienten bilden und erhält

$$3) \quad \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\sin x.$$

Den so erhaltenen Ausdruck bezeichnet man als die zweite Ableitung resp. als den zweiten Differentialquotienten von $\sin x$, und hat dafür die Bezeichnung

$$y'' \text{ resp. } \frac{d^2y}{dx^2}.$$

eingeführt; man erhält daher die Gleichung

$$4) \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2 \sin x}{dx^2} = -\sin x.$$

In dieser Weise kann man fortfahren. Auch die zweite Ableitung ist eine Funktion von x, man kann von ihr wieder den Differentialquotienten bilden und kann dies immer weiter ohne Ende fortsetzen.

Was wir soeben für $\sin x$ entwickelt haben, lässt sich auf alle von uns betrachteten Funktionen übertragen. Die Bezeichnungen sind den vorstehenden analog. Bezeichnen wir die Funktion durch

$$y \text{ resp. } f(x),$$

so stellen

$$5)\quad y', y'', y''' \ldots . \text{ resp. } f'(x), f''(x), f'''(x) \ldots .$$

oder auch

$$6)\quad \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3} \ldots . \text{ resp. } \frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \frac{d^3f(x)}{dx^3} \ldots .$$

die ersten, zweiten, dritten u. s. w. Ableitungen resp. Differentialquotienten dar. Man nennt sie zusammenfassend höhere Ableitungen oder auch höhere Differentialquotienten. Es ist also z. B.

$$7)\quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f(x)}{dx^2} = f''(x) \text{ u. s. w.}$$

§ 2. Die höheren Ableitungen der einfachsten Funktionen.

Am einfachsten lassen sich die höheren Differentialquotienten der Funktion e^x bilden. Für sie folgt, wenn

$$y = e^x$$

gesetzt wird, gemäss S. 79 sofort

$$y' = e^x,\ y'' = \frac{dy'}{dx} = e^x,\ y''' = \frac{dy''}{dx} = e^x \ldots .$$

u. s. w. Alle Differentialquotienten sind also einander gleich und zwar gleich der Funktion e^x selbst. Die besondere Einfachheit der Exponentialfunktion tritt auch hier deutlich hervor.

Es sei ferner

$$y = \cos x,$$

so folgt gemäss S. 64 und 65

$$y' = -\sin x,\ y'' = \frac{dy'}{dx} = -\cos x,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \sin x,\ y^{IV} = \frac{dy'''}{dx} = \cos x$$

u. s. w.,

die vierte Ableitung ist daher wieder gleich der Funktion y selbst; die nächstfolgenden Ableitungen haben demnach der Reihe nach dieselben Werte wie y' und die darauf folgenden Ableitungen.

Das gleiche Gesetz gilt für die Funktion $\sin x$. Hier finden wir aus der Gleichung

$$y = \sin x$$

durch fortgesetzte Differentiation

$$y' = \cos x,\ y'' = \frac{dy'}{dx} = -\sin x,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = -\cos x,\ y^{IV} = \frac{dy'''}{dx} = \sin x,$$

die nächste Ableitung ist daher wieder gleich $\cos x$, d. h. gleich der ersten, und es wiederholen sich nunmehr auch diesmal die Werte der Ableitungen in regelmässiger Reihenfolge.

Ist ferner

$$y = \ln x,$$

so folgt nach S. 77 zunächst

$$y' = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

und nunmehr nach S. 88

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = 1.2x^{-3} = \frac{1.2}{x^3}$$

$$y'''' = \frac{dy'''}{dx} = -1.2.3x^{-4} = -\frac{1.2.3}{x^4}$$

u. s. w. u. s. w.

Es sei endlich

$$y = x^n,$$

wo n eine beliebige Zahl sein kann. Man erhält sofort nach S. 88 die Gleichungen

$$y' = nx^{n-1}$$
$$y'' = n(n-1)x^{n-2}$$
$$y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$
$$y'''' = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}$$

u. s. w. Ist im besondern n eine ganze positive Zahl, so erhält für den $(n-1)$ten Differentialquotienten der Exponent von x den Wert $n-(n-1)=1$, also folgt

$$y^{(n-1)} = n(n-1)(n-2).....2.x$$
$$y^{(n)} = n(n-1)(n-2).....2.1$$

und da jetzt $y^{(n)}$ eine Konstante ist, erhalten alle folgenden Differentialquotienten den Wert Null. Ist n keine ganze positive Zahl, so kann man die Reihe der Ableitungen ins Unendliche fortsetzen, ohne dass eine den Wert Null erhält.

§ 3. Physikalische Bedeutung der zweiten Ableitung.

Auch die höheren Ableitungen haben wichtige Bedeutungen für die Anwendungen. Für die hier vorliegenden Zwecke genügt es, die Bedeutung des zweiten Differentialquotienten an einigen Beispielen klar zu legen; von den höheren haben wir nur wenig Gebrauch zu machen.

Es sei irgendeine geradlinige Bewegung durch die Gleichung

$$1) \quad s = f(t)$$

gegeben, beispielsweise die Bewegung des freien Falles. Nach Verlauf von resp.

$$t,\ t_1,\ t_2,\ t_3 \ldots\ldots$$

Sekunden möge der bewegliche Punkt die Wege von

$$s,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \ldots\ldots$$

Metern zurückgelegt haben. Seine Geschwindigkeit sei in den bezüglichen Zeitmomenten

$$v,\ v_1,\ v_2,\ v_3 \ldots\ldots\ldots$$

Die Geschwindigkeit wird im allgemeinen in jedem Augenblick wechseln. Um sich von der Art dieses Wechsels eine Vorstellung zu schaffen, hat man bekanntlich den Begriff der Beschleunigung eingeführt. Dieser Begriff knüpft zunächst an gleichförmig beschleunigte Bewegungen an, d. h. an solche, bei denen die Geschwindigkeit in gleichen Zeiträumen gleiche Zunahmen erleidet, und zwar stellt die Zunahme der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit (z. B. einer Sekunde) die Beschleunigung dar. Beträgt daher diese Zunahme in τ Sekunden η Längeneinheitn (z. B. Meter), so ist die Beschleunigung ω durch die Gleichung

$$2) \quad \omega = \frac{\eta}{\tau}$$

gegeben.

Dies haben wir nun auf die durch die Gleichung 1) dargestellte Bewegung anzuwenden. In der Zeit dt ist der Zuwachs, den die Geschwindigkeit erfährt, nach unserem Sprachgebrauch gleich dem Differential dv und daher ergiebt sich für die momentane Beschleunigung ω der Wert

$$3) \quad \omega = \frac{dv}{dt}.$$

Wir wissen aber aus Kapitel II (S. 55), dass v der Differentialquotient von s nach der Zeit ist, d. h.

$$4) \quad v = \frac{ds}{dt}$$

und daher ist ω der zweite Differentialquotient von s, also

$$5) \quad \omega = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Beispielsweise ist für die Bewegung des freien Falls (S. 47)

$$v = gt,$$

daher folgt für die Beschleunigung

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = g.$$

In der That bedeutet ja gerade g die Beschleunigung des freien Falls.

Hieran knüpft sich sofort eine Folgerung von grosser Tragweite. Bekanntlich giebt die Beschleunigung ein Mass der Kraft ab, welche die Bewegung verursacht; wir definieren die Kräfte durch die Beschleunigungen, die sie einem Körper von der Masse 1 erteilen, der ihrer Wirkung unterliegt. Ist uns daher das Gesetz irgend einer Bewegung bekannt, so können wir nunmehr in einfacher Weise auf die wirkenden Kräfte schliessen, welche die Bewegung hervorrufen.

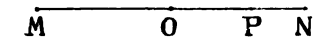


Fig. 47.

Ein einfaches Beispiel dieser Art ist das folgende. Ein Punkt P von der Masse 1 bewege sich auf einer Geraden (Fig. 47), sodass sein Abstand x von einem festen Punkt O durch die Gleichung

$$6) \quad x = A \sin t$$

gegeben ist. Wir erhalten zunächst für die Geschwindigkeit des Punktes

$$7) \quad v = \frac{dx}{dt} = A \cos t$$

und hieraus, indem wir den zweiten Differentialquotienten bilden, für die Beschleunigung

$$8) \quad W = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A \sin t.$$

Setzen wir für $A \sin t$ aus Gleichung 6) seinen Wert x, so folgt noch

$$9) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -x$$

und diese Gleichung besagt, dass die Beschleunigung, d. h. also die auf den Punkt wirkende Kraft seinem Abstand von dem festen Zentrum gleich ist. Das negative Zeichen bedeutet, dass die Kraft die Entfernung des beweglichen Punktes von O zu verringern bestrebt ist, dass sie also eine anziehende ist.

Unter dieses Gesetz fällt eine grosse Zahl von Bewegungen, die in der Natur vorkommen, nämlich die meisten Bewegungen, bei denen Körper um eine Gleichgewichtslage oszillieren. Solcher Art sind nach Huygens die Bewegungen der Aetherteilchen bei der Fortpflanzung

des Lichts, die Bewegungen der Luftteilchen bei der Fortpflanzung des Schalls, die vertikalen Bewegungen der Wasserteilchen bei Fortpflanzung von Wasserwellen, die Bewegungen der einzelnen Teilchen einer schwingenden Seite, kurz alle Bewegungen der kleinen Teilchen, die bei stehenden oder fortschreitenden Wellen auftreten.

Die Natur dieser Bewegung ist von der nämlichen Art, wie die Bewegung des Pendels um seine Ruhelage. Setzen wir nämlich für t resp.

$$0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi,\ \frac{5\pi}{2}\ldots\ldots$$

und bezeichnen die wirkende Kraft durch k, so erhalten wir für x, v, k in den eben genannten Momenten die folgenden Werte

$$\begin{aligned} x &= 0,\quad A,\quad 0,\ -A,\quad 0,\quad A\ldots \\ v &= A,\quad 0,\ -A,\quad 0,\quad A,\quad 0\ldots \\ k &= 0,\ -A,\quad 0,\quad A,\quad 0,\ -A\ldots \end{aligned}$$

Daraus entnehmen wir folgende Schilderung des Bewegungsvorgangs. Im Anfang der Bewegung, d. h. zur Zeit $t = 0$, steht der Punkt in O, er hat die Geschwindigkeit A, während die wirkende Kraft gleich Null ist. Nach $\frac{\pi}{2}$ Sekunden steht er in M, seine Geschwindigkeit ist inzwischen zu Null geworden und die anziehende Kraft hat ihren höchsten Werth A erreicht. Der Punkt kehrt um und seine Geschwindigkeit nimmt infolge der anziehenden Kraft ununterbrochen zu. Nach π Sekunden befindet er sich wieder in O und geht mit der grössten Geschwindigkeit, deren er fähig ist, durch O hindurch. Nach $\frac{3\pi}{2}$ Sekunden ist er in N; er hat seinen grössten Abstand linksseitig von O erreicht, seine Geschwindigkeit ist wieder zu Null geworden, während die Kraft wieder ihren Maximalwert erreicht hat. Nach 2π Sekunden ist der Punkt wieder in O, geht mit der Geschwindigkeit A durch O hindurch, die anziehende Kraft ist Null. Diese nimmt jetzt wieder zu, die Geschwindigkeit nimmt dadurch ab, bis der Punkt nach M gelangt, und so schwingt er dauernd in regelmässiger Weise geradlinig hin und her.

§ 4. Geometrische Bedeutung des zweiten Differentialquotienten.

Der zweite Differentialquotient hat auch eine wichtige geometrische Bedeutung. Von der umstehenden Kurve (Fig. 48) sagt man, dass sie in dem Teil ABC konkav gegen die x-Axe gekrümmt ist, in dem Teil CDE konvex; es ist dies die nämliche Bezeichnung, die in der Optik zur Unterscheidung der Linsen u. s. w. benutzt wird. Es sei

$$1) \quad y = f(x)$$

die Gleichung der Kurve; wir wollen die Werte ins Auge fassen, die $\operatorname{tg}\tau$ auf den einzelnen Kurventeilen besitzt. Längs des Kurvenzuges ABC nimmt der Winkel τ von A an unaufhörlich ab, desgleichen also auch $\operatorname{tg}\tau$. Im Punkte B, dem höchsten Punkt der Kurve, ist $\tau = 0$, in den dann folgenden Punkten ist τ zunächst wenig von π verschieden und nimmt bis C wiederum unaufhörlich ab; $\operatorname{tg}\tau$ ist daher im Punkte B gleich Null, hat dann zunächst einen kleinen negativen Wert und erhält hernach immer grössere negative Werte, es nimmt also ebenfalls ab. Für diesen ganzen Kurvenzug muss demnach (S. 66) der Differentialquotient von $\operatorname{tg}\tau$ negativ sein; d. h. es ist

$$2) \quad \frac{d\operatorname{tg}\tau}{dx} = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} < 0.$$

Das umgekehrte folgt für den Kurventeil CDE. Hier nimmt, wenn x wächst, auch τ und demnach auch $\operatorname{tg}\tau$ unaufhörlich zu; von C bis D an hat nämlich $\operatorname{tg}\tau$ negative Werte, die bis Null abnehmen, und von E bis F erhält $\operatorname{tg}\tau$ immer grösser werdende positive Werte. Es ist daher für diesen Kurvenzweig

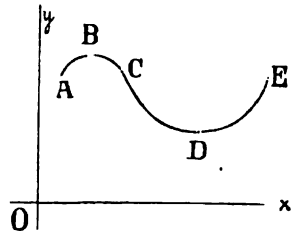


Fig. 48.

$$3) \quad \frac{d\operatorname{tg}\tau}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} > 0.$$

Wir sehen hieraus, dass das Vorzeichen des zweiten Differentialquotienten von y darüber entscheidet, ob unsere Kurve konkav oder konvex gegen die x-Axe liegt.

Die beiden Kurvenzüge werden durch den Punkt C getrennt, in denen der zweite Differentialquotient

$$4) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

ist, und der den Namen Wendepunkt führt.

Die Eigenschaft einer Kurve, konkav oder konvex gekrümmt zu sein, hängt natürlich davon ab, auf welcher Seite der Kurve man sich befindet. Bisher hatten wir angenommen, dass die Kurve ganz auf der positiven Seite der x-Axe verläuft. Verläuft sie dagegen auf der negativen Seite der x-Axe — man denke sich die x-Axe parallel mit sich so lange verschoben, bis dies eintritt — so wird jetzt konkav gegen die Axe, was vorher konvex war und umgekehrt. Um nun zu einem vollen Kriterium für den Kurvenlauf zu gelangen, hat man folgendes zu beachten: Von der Kurve der Fig. 48 ist der Zug ABC konkav gegen die x-Axe, für ihn ist y positiv, dagegen die zweite

Ableitung $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ; für den konkaven Zug CDE, der einer veränderten Lage der x-Axe entspricht, ist y negativ, die zweite Ableitung positiv; in beiden Fällen ist daher

$$5) \quad y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} < 0.$$

Umgekehrt ist es für die konvexen Teile. Für den Zug CDE der Kurve von Fig. 48 ist y samt der zweiten Ableitung positiv, nach Verlegung der x-Axe sind für den Zug ABC beide Grössen negativ, es ist daher in beiden Fällen

$$6) \quad y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} > 0.$$

Damit haben wir ein volles Kriterium dafür, ob eine Kurve konvex oder konkav gegen die x-Axe liegt.

Ein einfaches Beispiel für diese Verhältnisse bietet die Sinuskurve (vgl. Fig. 33 auf S. 64), deren Gleichung

$$y = \sin x$$

ist. Längs je eines über oder unter der x-Axe liegenden Kurvenzuges ist der zweite Differentialquotient abwechselnd negativ oder positiv und das zugehörige y abwechselnd positiv oder negativ; die Kurve liegt also gegen die x-Axe stets konvex. Die Schnittpunkte der Kurve mit der x-Axe sind sämtlich Wendepunkte.

§ 5. Die höheren Differentiale.

Wie die ersten Differentialquotienten zur Einführung von Differentialen Veranlassung gegeben haben, so auch die höheren Differentialquotienten. Man bezeichnet

$$d^2y \text{ resp. } d^2f(x)$$

als das zweite Differential von y bezüglich $f(x)$. Als definierende Gleichung des zweiten Differentials haben wir

$$1) \quad d^2y = d^2f(x) = f''(x)\,dx^2,$$

wie sich aus Gleichung 7) S. 165 durch Beseitigung der Nenner unmittelbar ergiebt. Im besondern erhalten wir z. B. für die Funktion x^n

$$2) \quad d^2(x^n) = n(n-1)\,x^{n-2}\,dx^2,$$

für die Funktion e^x ist

$$3) \quad d^2(e^x) = e^x\,dx^2,$$

für die Funktion $\sin x$

$$4) \quad d^2(\sin x) = -\sin x \,.\, dx^2.$$

Die wirkliche Berechnung des zweiten Differentials hat man durch zweimalige Differentiation auszuführen.

Beispielsweise folgt aus

$$d(3x^4 + 4\sin x) = (12x^3 + 4\cos x)\,dx$$

durch weitere Differentiation sofort

$$d^2(3x^4 + 4\sin x) = (36x^2 - 4\sin x)\,dx^2;$$

ebenso findet man

$$d^2(x\sin x) = (2\cos x - x\sin x)\,dx^2$$

u. s. w. u. s. w.

In analoger Weise kann man auch die höheren Differentiale als Rechnungsgrössen einführen; da wir keinen Gebrauch davon zu machen haben, gehen wir nicht weiter darauf ein.

§ 6. Die partiellen Differentialquotienten und das totale Differential.

Wenn sich ein Gas unter veränderlichem Druck befindet, ohne dass seine Temperatur konstant erhalten wird, so hängt das Volumen v sowohl von dem Druck p, als auch von der Temperatur ϑ ab. Wir bezeichnen demgemäss v als eine Funktion von p und ϑ. In derselben Weise ist der Inhalt einer Ellipse, der von der Länge der grossen Axe $2a$ und der kleinen Axe $2b$ abhängt, eine Funktion von a und b, der Inhalt eines geraden Parallelepipedons eine Funktion seiner drei Kanten u. s. w. u. s. w. Wir gelangen so zu dem Begriff einer Funktion von zwei oder mehr veränderlichen Grössen. In Analogie mit dem Inhalt von § 7 des zweiten Kapitels (S. 53) nennen wir das Volumen v, wenn wir es als Funktion von p und ϑ auffassen, die abhängige Variabele, während wir p und ϑ als die beiden unabhängigen Variabeln bezeichnen und analog in den anderen vorstehend erwähnten Fällen.

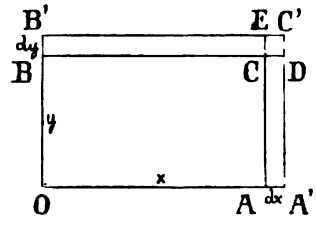


Fig. 49.

Für Funktionen von zwei oder mehr als zwei Veränderlichen, die wir jetzt mit $x, y, z \ldots$ bezeichnen wollen, hat man folgende Zeichen eingeführt:

$$f(x, y), \quad F(x, y, z), \quad \varphi(x, y) \ldots\ldots$$

u. s. w. Auf diese Funktionen haben wir nun die Regeln und Sätze der Differentialrechnung auszudehnen.

Wir knüpfen an folgendes Beispiel an. Es sei I der Inhalt eines Rechtecks $OABC$ (Fig. 49), dessen Seiten die Länge x und y haben, so dass

$$1) \quad I = xy$$

ist. Die Längen dieser Seiten denken wir uns nun veränderlich, so wird auch der Inhalt I des Rechtecks sich mit ihnen ändern. Wir können das Rechteck zunächst nur so ändern, dass wir die Seite $OB = y$ unverändert lassen, also nur die Länge x der Seite OA als veränderlich betrachten. Bei dieser Auffassung ist der Inhalt I eine Funktion von x allein, und wir können auf sie die bisher auseinander gesetzten Regeln der Differentialrechnung anwenden. Wir erteilen also der Seite $OA = x$ einen Zuwachs AA', den wir durch dx bezeichnen und bestimmen das zugehörige Differential von I. Um anzudeuten, dass wir jetzt I nur als Funktion von x auffassen, bezeichnen wir es durch dI_x und erhalten durch Differentiation der Gleichung 1) sofort

$$2) \quad dI_x = y\,dx,$$

das Differential dI_x stellt also geometrisch den Inhalt des kleinen Rechtecks $AA'CD$ dar.

Das Rechteck $OABC$ kann sich aber auch so ändern, dass nur die Länge y der Seite OB sich ändert, während x konstant bleibt; alsdann wird sein Inhalt I eine Funktion von y allein. Wir erteilen jetzt y einen Zuwachs dy und bezeichnen in diesem Fall das Differential von I zum Unterschied durch dI_y, so ergiebt sich, wenn wir die Gleichung 1) nach y differenzieren,

$$3) \quad dI_y = x\,dy,$$

das Differential dI_y stellt also geometrisch den Inhalt des kleinen Rechtecks $BB'CE$ dar.

Gehen wir in den Gleichungen 2) und 3) zu den Differentialquotienten über, so erhalten wir

$$\frac{dI_x}{dx} = y, \quad \frac{dI_y}{dx} = x$$

und es stellen diese beiden Quotienten die Differentialquotienten von I nach x und von I nach y dar. Man hat für sie die etwas kürzeren Bezeichnungen

$$4) \quad \frac{\partial I}{\partial x} \text{ resp. } \frac{\partial I}{\partial y}$$

eingeführt, bei denen die runden ∂ schon an und für sich daran erinnern sollen, dass man I in dem einen Fall nur als Funktion von x, in dem anderen nur als Funktion von y ansehen soll. Man hat also

$$5) \quad \frac{\partial I}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial I}{\partial y} = x,$$

und wenn man diese Werte von y und x in die Gleichungen 2) und 3) einsetzt, so folgt

$$6) \quad \begin{aligned} dI_x &= \frac{\partial I}{\partial x} dx \\ dI_y &= \frac{\partial I}{\partial y} dy. \end{aligned}$$

Wir können endlich an unserem Rechteck sowohl x als y sich ändern lassen. Aendern wir wieder x um dx, y um dy, so ändert sich das Rechteck um die kleine Fläche $AA'C'B'BC$, deren Inhalt wir mit ΔI bezeichnen wollen; ΔI zeigt also den Zuwachs an, den der Inhalt I erfährt, wenn die Seiten x und y resp. den Zuwachs dx und dy erleiden. Hier entsteht sofort die Frage, wie sich der Gesamtzuwachs von I zu den Differentialen dI_x und dI_y verhält. Wir sehen sofort, dass die Fläche

$$\Delta I = AA'CD + BB'CE + CDEC'$$

ist; resp. da $CDEC'$ den Inhalt $dx\,dy$ hat,

$$7) \quad \Delta I = dI_x + dI_y + dx\,dy.$$

Es folgt also, dass ΔI bis auf ein kleines Rechteck mit dem Inhalt $dx\,dy$ gleich der Summe von dI_x und dI_y ist. Wir führen jetzt noch die Bezeichnung

$$8) \quad dI = dI_x + dI_y$$

ein und nennen dI das totale Differential, dI_x und dI_y resp. die ihnen nach 3) zukommenden Werte

$$\frac{\partial I}{\partial x} dx \text{ und } \frac{\partial I}{\partial y} dy$$

partielle Differentiale. Das totale Differential ist daher gleich der Summe der partiellen Differentiale. Dies ist die Eigenschaft, durch die es rechnerisch definiert ist. Seine weitere Bedeutung ergiebt sich aus Formel 7); wie sie erkennen lässt, kommt das totale Differential dI dem Gesamtzuwachs ΔI ausserordentlich nahe; der Fehler beträgt, wenn dx und dy kleine Grössen erster Ordnung bedeuten (S. 86), nur eine kleine Grösse zweiter Ordnung, wenn also beispielsweise dx resp. dy je den Wert 0,001 haben, nur den Wert 0,000001. Wir treffen also hier auf die gleichen Beziehungen, die uns von Funktionen einer Variabeln her geläufig sind. Auch hier wird sich ebenso, wie im Bereich der Funktionen einer Variabeln, ergeben, dass das in die Rechnung eingehende nicht die Differentialgrössen selbst, sondern ihre Quotienten sind, und dass diese Quotienten wiederum die exakte Darstellung der in Frage stehenden Erscheinungen und Gesetze vermitteln (S. 98). Aus diesem Grunde ist es wiederum praktisch gerechtfertigt, wenn wir uns unter dI direkt den Gesamt-

zuwachs von I vorstellen, der dem Zuwachs dx von x und dy von y entspricht.

Setzen wir in Gl. 8) noch für dI_x und dI_y ihre Werte ein, so erhalten wir für dI den Ausdruck

$$9) \quad dI = \frac{\partial I}{\partial x} dx + \frac{\partial I}{\partial y} dy$$

und in dem hier vorliegenden Fall wird im besondern gemäss Gl. 4)

$$dI = y\,dx + x\,dy.$$

Bemerkung. In der Thatsache, dass man die Summe der partiellen Differentiale als den totalen Zuwachs der Funktion auffassen darf, kommt nichts anderes zum Ausdruck, als die naturwissenschaftlich geläufige Vorstellung, die man als Prinzip der Superposition kleiner Wirkungen bezeichnet. Nach dieser Auffassung betrachtet man die unendlich kleine Gesamtwirkung, der ein Körper oder ein einzelnes Teilchen in jedem Augenblick unterliegt, als die einfache und direkte Summe aller unendlich kleinen Einzelwirkungen, und dies läuft in der That darauf hinaus, das totale Differential als die Gesamtänderung anzusehen, die eine Funktion erfährt. Handelt es sich z. B. um das Volumen v eines Gases, dessen Druck p und dessen Temperatur ϑ sich ändern, so besteht die Gesamtänderung des Volumens aus der Summe der Aenderungen, die bei konstantem Druck, resp. bei konstanter Temperatur eintreten; dies heisst eben, dass das totale Differential von v gleich der Summe der partiellen Differentiale ist, die der blossen Aenderung einerseits von ϑ, andrerseits von p entsprechen. Auch hier stimmen also die mathematischen Methoden mit den allgemeinen physikalischen Vorstellungen überein.

Die vorstehenden Entwicklungen lassen sich auf beliebige Funktionen ausdehnen. Ist u eine solche, also

$$10) \quad u = f(xy),$$

so können wir zunächst wieder u als Funktion von x allein auffassen, d. h. wir denken uns, dass y einen festen Wert behält und nur x sich ändert; dem entspricht ein partieller Differentialquotient von u oder $f(xy)$ nach x, den man auch durch $f'(x)$ bezeichnet*), so dass

$$11) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f(xy)}{\partial x} = f'(x)$$

zu setzen ist; für das bezügliche Differential du_x besteht die Gleichung

$$du_x = \frac{\partial u}{\partial x} dx = \frac{\partial f(xy)}{\partial x} dx = f'(x)\,dx.$$

Ebenso erhalten wir unter der Annahme, dass x konstant bleibt und nur y sich ändert, den partiellen Differentialquotienten nach y, für den man analog die kurze Bezeichnung $f'(y)$ gebraucht, so dass

$$12) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f(xy)}{\partial y} = f'(y)$$

*) Diese Bezeichnung will ausdrücken, dass man $f(xy)$ zunächst nur als Funktion von x ansieht, sie also so behandelt, als ob sie eine $f(x)$ wäre; deren Ableitung ist dann $f'(x)$.

zu setzen ist; für das bezügliche Differential du_y wird demgemäss

$$du_y = \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{\partial f(xy)}{\partial y} dy = f'(y)\, dy.$$

Aus beiden bilden wir den Ausdruck

$$13) \quad \begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ &= \frac{\partial f(xy)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(xy)}{\partial y} dy \\ &= f'(x)\, dx + f'(y)\, dy, \end{aligned}$$

den wir als das totale Differential von u bezeichnen. Seine Beziehung zu dem Gesamtzuwachs Δu, den u erleidet, wenn x den Zuwachs dx und y den Zuwachs dy erfährt, ist die nämliche wie oben; du und Δu sind bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung einander gleich. Ist, um noch ein zweites Beispiel zu behandeln,

$$u = ax^2 + cy^2,$$

so ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2ax, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2cy.$$

Ferner ist der Zuwachs Δu gleich der Differenz der beiden Werte, die u für $x + dx$, $y + dy$ und für x, y hat; es ist also

$$\begin{aligned} \Delta u &= a(x+dx)^2 + c(y+dy)^2 - (ax^2 + cy^2) \\ &= 2ax\, dx + a\, dx^2 + 2cy\, dy + c\, dy^2 \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + a\, dx^2 + c\, dy^2. \end{aligned}$$

Demnach ist

$$\Delta u = du + a\, dx^2 + c\, dy^2,$$

und wenn dx und dy unendlich kleine Grössen erster Ordnung sind, so beträgt der Fehler nur eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung.

Wir schliessen mit der selbstverständlichen Bemerkung, dass das totale Differential einer konstanten Grösse C Null ist. Denn es ist

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial y} = 0,$$

also auch

$$14) \quad dC = 0.$$

Wir haben hiervon sehr bald eine wichtige Anwendung zu machen und haben deshalb ausdrücklich darauf hingewiesen.

Beispiele. Es sei $u = x^2 - y^2$, so ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad du = 2x\, dx - 2y\, dy.$$

Ist $u=(x+y)^2$, so ist

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2(x+y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2(x+y),\quad du=2(x+y)(dx+dy).$$

Ist $u=\sin x\,.\cos y$, so ist

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos x\cos y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\sin x\sin y$$
$$du=\cos x\cos y\,dx-\sin x\sin y\,dy.$$

Ist $u=\ln(x^2+y^2)$, so ist

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$$
$$du=\frac{2(x\,dx+y\,dy)}{x^2+y^2}.$$

Nichts steht im Wege, die obigen Definitionen und Formulierungen auf Funktionen von drei und mehr Variabeln zu übertragen. Ist z. B.

$$15)\quad u=f(x,y,z)$$

eine Funktion von drei Variabeln, so haben wir drei partielle Differentialquotienten,

$$16)\quad \begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial f(xyz)}{\partial x}=f'(x),\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{\partial f(xyz)}{\partial y}=f'(y),\\ \frac{\partial u}{\partial z}&=\frac{\partial f(xyz)}{\partial z}=f'(z),\end{aligned}$$

die so definiert sind, dass man in u entweder nur x oder nur y oder nur z als variabel betrachtet; aus ihnen bildet man das totale Differential

$$17)\quad \begin{aligned}du&=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz\\ &=\frac{\partial f(xyz)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(xyz)}{\partial y}dy+\frac{\partial f(xyz)}{\partial z}dz\\ &=f'(x)\,dx+f'(y)\,dy+f'(z)\,dz,\end{aligned}$$

dessen Bedeutung die analoge ist, wie bisher. Ist z. B.

$$u=xyz,$$

so dass u den Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedons mit den Seiten x, y, z bedeutet, so folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yz,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=xz,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=xy$$

und daher

$$du=yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$$

und dieser Ausdruck unterscheidet sich, wie die Ausrechnung leicht ergiebt, von dem Zuwachs des Parallelepipedons, der dem Zuwachs von x um dx, von y um dy, von z um dz entspricht, nur um unendlich kleine Grössen zweiter und dritter Ordnung.

§ 7. Differentiation von Funktionen, die aus mehreren Funktionen einer Variabeln zusammengesetzt sind.

Eine erste wichtige Anwendung finden die Formeln, die das totale Differential geben, in dem Fall, dass u eine Funktion ist, die in ihrem Ausdruck von zwei Variabeln x und y abhängt, während x und y ihrerseits wieder von einer dritten Variabeln t abhängen. Die Funktion u hängt dann in Wirklichkeit nur von t ab, und es ist die Frage, wie wir ihren Differentialquotienten nach t erhalten. Ist

$$1) \quad u = F(xy),$$

während für x und y die Gleichungen

$$2) \quad x = f(t),\ y = \varphi(t)$$

bestehen, so folgt (nach Gl. 13 S. 176) zunächst

$$du = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

und wir haben jetzt diese Gleichung nur durch dt zu dividieren, um zu der Gleichung

$$3) \quad \frac{du}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

zu gelangen. Diese giebt uns den gesuchten Differentialquotienten, und zwar sind nach 2) die Differentialquotienten

$$4) \quad \frac{dx}{dt} = f'(t),\quad \frac{dy}{dt} = \varphi'(t),$$

so dass also

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}f'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}\varphi'(t)$$

ist. Dasselbe Verfahren hat man anzuwenden, wenn die Funktion u zunächst von drei oder mehr Variabeln abhängt. Ist also

$$5) \quad u = F(xyz),$$

während x, y, z Funktionen von t sind, also

$$6) \quad x = f(t),\ y = \varphi(t),\ z = \psi(t),$$

so erhält man auf dieselbe Weise

$$du = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz$$

und hieraus jetzt durch Division mit dt

$$7) \quad \frac{du}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

oder indem wir für die Differentialquotienten von x, y, z nach t ihre Werte einsetzen,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} f'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}\varphi'(t) + \frac{\partial F}{\partial z}\psi'(t).$$

Eine Funktion dieser Art ist z. B. der Abstand eines Planeten von der Sonne. Dieser Abstand ist in Wirklichkeit einzig und allein eine Funktion der Zeit; wir können diesen Abstand aber nur so bestimmen, dass wir ihn abhängig machen von den Koordinaten des Ellipsenpunktes, in dem sich der Planet befindet, und nun erst jede dieser Koordinaten als eine Funktion von der Zeit t ansehen.

Wir geben zunächst eine rein rechnerische Anwendung der vorstehenden Resultate. Man kann nämlich das obige Verfahren selbst dann mit Vorteil anwenden, wenn es sich um Funktionen handelt, deren Ausdruck nur eine einzige Variabele enthält, z. B. um die Funktion

$$8) \quad u = x^x.$$

Diese Funktion hängt in der That in ihrem Ausdruck nur von einer einzigen Variabeln x ab, aber wir können keine unserer Grundformeln des Differenzierens auf sie anwenden, sie ist nämlich sowohl als Potenz x^n, sowie auch als Funktion a^x zu betrachten. Wir gehen daher am sichersten so vor, dass wir zunächst mit der Funktion

$$u = y^z$$

operieren, die jetzt eine Funktion von y und z ist, und nachher $y = z = x$ setzen. Es ist

$$du = \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

und zwar haben wir (S. 88 und 91)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = z y^{z-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = y^z \ln y,$$

folglich ist

$$du = z y^{z-1}\, dy + y^z \ln y\, dz.$$

Setzen wir nun $y = z = x$, so wird schliesslich

$$9) \quad \begin{aligned} du &= x^x\, dx + x^x \ln x\, dx \\ &= x^x (1 + \ln x)\, dx. \end{aligned}$$

§ 8. Der planare und kubische Ausdehnungskoeffizient.

Um ein Beispiel aus den Anwendungen zu geben, denke man sich eine rechteckige ebene Platte von geringer Dicke, die vermöge

ihrer Struktur nach ihren beiden Hauptrichtungen verschiedene Ausdehnungskoeffizienten besitzt, z. B. eine krystallinische Platte des rhombischen Systems, die senkrecht zu der einen Hauptaxe liegt, während ihre Seiten mit den beiden anderen Hauptaxen zusammenfallen. Wird sie der Erwärmung unterworfen, so dehnt sie sich nach beiden Hauptrichtungen ungleich aus, doch so, dass sie rechteckige Form bewahrt. Wir wollen ihren thermischen Ausdehnungskoeffizienten bestimmen; wie aus S. 48 hervorgeht, wird er durch den Differentialquotienten einer quadratischen Fläche von der Grösse 1 nach der Temperatur dargestellt. Nach den Erörterungen von § 6 ist zunächst das totale Differential der gegebenen Fläche, d. h. von

$$1) \quad I = xy,$$

zu bilden, nämlich

$$2) \quad dI = \frac{\partial I}{\partial x} dx + \frac{\partial I}{\partial y} dy,$$

und wenn wir jetzt diese Gleichung durch $d\vartheta$ dividieren, so ergiebt sich

$$\frac{dI}{d\vartheta} = \frac{\partial I}{\partial x}\frac{dx}{d\vartheta} + \frac{\partial I}{\partial y}\frac{dy}{d\vartheta},$$

oder wenn wir für $\frac{\partial I}{\partial x}$ und $\frac{\partial I}{\partial y}$ ihre Werte einsetzen,

$$\frac{dI}{d\vartheta} = y\frac{dx}{d\vartheta} + x\frac{dy}{d\vartheta}.$$

Setzen wir in diese Gleichung $x = y = 1$, so giebt sie den gesuchten Ausdehnungskoeffizienten der Fläche, nämlich

$$3) \quad \frac{dI}{d\vartheta} = \frac{dx}{d\vartheta} + \frac{dy}{d\vartheta}.$$

Hier bedeuten $\frac{dx}{d\vartheta}$ und $\frac{dy}{d\vartheta}$ (nach S. 48) die linearen Ausdehnungskoeffizienten nach den beiden Hauptrichtungen; der Flächenausdehnungskoeffizient ist also gleich der Summe der linearen.

Die Differentialquotienten von x und y nach ϑ hängen von den Gleichungen ab, welche die Ausdehnung nach beiden Richtungen bestimmen; ist z. B. in erster Annäherung

$$4) \quad \begin{aligned} x &= 1 + \alpha\vartheta \\ y &= 1 + \beta\vartheta, \end{aligned}$$

so wird

$$\frac{dx}{d\vartheta} = \alpha, \quad \frac{dy}{d\vartheta} = \beta$$

und wir erhalten schliesslich

$$5) \quad \frac{dI}{d\vartheta} = \alpha + \beta$$

als den Ausdehnungskoeffizienten der Platte selbst.

Analog kann man eine Formel für den kubischen Ausdehnungskoeffizienten eines nach seinen drei Hauptrichtungen verschieden sich ausdehnenden Parallelepipedons ableiten, beispielsweise wiederum eines Krystalls des rhombischen Systems, dessen Kanten die Richtung der krystallographischen Hauptaxen haben. Sein Inhalt ist

$$6) \quad I = xyz$$

und es folgt als totales Differential wieder

$$7) \quad dI = \frac{\partial I}{\partial x} dx + \frac{\partial I}{\partial y} dy + \frac{\partial I}{\partial z} dz,$$

oder aber, weil

$$\frac{\partial I}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial I}{\partial y} = xz, \quad \frac{\partial I}{\partial z} = xy$$

ist, die Formel

$$dI = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

und hieraus durch Division mit $d\vartheta$

$$\frac{dI}{d\vartheta} = yz\frac{dx}{d\vartheta} + xz\frac{dy}{d\vartheta} + xy\frac{dz}{d\vartheta},$$

wo die drei in der Formel auf der rechten Seite auftretenden Differentialquotienten die linearen Ausdehnungskoeffizienten längs der drei Hauptrichtungen sind. Den gesuchten Ausdehnungskoeffizienten erhalten wir nun, indem wir die ursprünglichen Längen des Parallelepipedons $x = y = z = 1$ setzen, und finden:

$$8) \quad \frac{dI}{d\vartheta} = \frac{dx}{d\vartheta} + \frac{dy}{d\vartheta} + \frac{dz}{d\vartheta},$$

d. h. der räumliche Ausdehnungskoeffizient ist gleich der Summe der linearen. Die Formel gilt, wie auch x, y, z von ϑ abhängen mögen. Nehmen wir wieder den einfachsten Fall an, nämlich dass

$$9) \quad \begin{aligned} x &= 1 + \alpha\vartheta \\ y &= 1 + \beta\vartheta \\ z &= 1 + \gamma\vartheta, \end{aligned}$$

so wird

$$\frac{dx}{d\vartheta} = \alpha, \quad \frac{dy}{d\vartheta} = \beta, \quad \frac{dz}{d\vartheta} = \gamma$$

und es ergiebt sich schliesslich

$$10) \quad \frac{dI}{d\vartheta} = \alpha + \beta + \gamma$$

für den kubischen Ausdehnungskoeffizienten des Parallelepipedons.

Wenn insbesondere $\alpha = \beta = \gamma$ ist, was einem isotropen Körper entsprechen würde, so kommt die bekannte Formel

$$11) \quad \frac{dI}{d\vartheta} = 3\alpha;$$

der kubische Ausdehnungskoeffizient ist dann das dreifache des linearen.

§ 9. Die höheren partiellen Differentialquotienten.

Der Vollständigkeit halber wollen wir nicht unterlassen, kurz die höheren partiellen Differentialquotienten zu erwähnen. Es genügt, die bezüglichen Verhältnisse an einem Beispiel auseinanderzusetzen. Sei

$$1) \quad u = \sin x . \cos y,$$

so hatten wir gefunden

$$2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\sin x \sin y.$$

Differenzieren wir die vorstehenden partiellen Differentialquotienten noch einmal je nach x und y, so erhalten wir in leicht verständlicher Bezeichnung aus der ersten Gleichung

$$3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin x \sin y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -\cos x \sin y$$

und aus der zweiten

$$4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\cos x \sin y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sin x \cos y.$$

Einer kurzen Erläuterung bedürfen nur die Differentialquotienten $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$; der eine entsteht, wenn man zuerst nach x und dann nach y differenziert, der andere, wenn man zuerst nach y und dann nach x differenziert. Wie die vorstehenden Gleichungen zeigen, ist

$$5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x};$$

der Wert dieses Differentialquotienten ist also von der Reihenfolge der Differentiation unabhängig. Dies ist freilich hier nur für unser Beispiel erwiesen, es ist aber ein Satz, der für alle in Betracht kommenden Funktionen gilt.

Man nennt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

zweite partielle Differentialquotienten. Durch nochmaliges Differenzieren entstehen die dritten partiellen Differentialquotienten

u. s. w., auch für sie gilt das Gesetz, dass ihr Wert von der Reihenfolge der Differentiation unabhängig ist. Für das genauere verweisen wir auf die genannten Lehrbücher.

§ 10. Differentiation unentwickelter Funktionen.

Eine sehr wichtige Anwendung der Entwicklungen des § 5 ist die folgende. Denken wir uns, um die Begriffe zu fixieren, die Gleichung der Ellipse

$$1) \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

und stellen die Aufgabe, $\operatorname{tg}\tau$, d. h. also $\frac{dy}{dx}$ zu bestimmen. Um dies zu thun, haben wir die Gleichung nach y aufzulösen, so dass wir y als Funktion von x erhalten, und dann zu differenzieren. Es giebt aber noch eine andere, einfachere Methode. Die linke Seite unserer Gleichung stellt nämlich, für sich betrachtet, jedenfalls eine Funktion von x und y dar, die wir durch $F(xy)$ bezeichnen, so dass wir

$$2) \quad F(xy)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

erhalten. Diese Funktion können wir nach den oben auseinandergesetzten Regeln differenzieren. Wir bilden das totale Differential für die Gleichung 2) und erhalten, da das totale Differential der rechten Seite, wie (S. 176) bemerkt, Null ist,

$$3) \quad \frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$$

und hieraus folgt, wenn wir die Werte

$$4) \quad \frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2x}{a^2},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2y}{b^2}$$

in Gleichung 3) einsetzen, sofort

$$5) \quad \frac{2x\,dx}{a^2}+\frac{2y\,dy}{b^2}=0.$$

Sonach ergiebt sich

$$6) \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\cdot\frac{b^2}{a^2}.$$

Wir haben somit den Differentialquotienten von y bestimmt, ohne dass wir nötig hatten, die Gleichung 1), die y als Funktion von x definiert, aufzulösen. Man nennt dies Verfahren die Differentiation unentwickelter Funktionen.

Die allgemeine Darstellung des vorstehenden lautet wie folgt: Es sei eine Gleichung zwischen x und y in der Form

$$7) \quad F(xy) = C$$

gegeben, wo C eine Konstante ist und $F(xy)$ eine Funktion von x und y. Wir bilden wieder von beiden Seiten der Gleichung das totale Differential und erhalten

$$8) \quad \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$

und hieraus

$$9) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{F'(x)}{F'(y)},$$

wo $F'(x)$ und $F'(y)$ die S. 175 angegebene Bedeutung haben.

Besteht z. B. zwischen x und y die Gleichung

$$xy = C,$$

so folgt durch Differentiation

$$y\,dx + x\,dy = 0$$

und hieraus sofort

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} = -\frac{C}{x^2}.$$

Dies entspricht genau dem auf S. 72 gefundenen Resultat.

Ein weiteres Beispiel sei die durch die Gleichung

$$F(xy) = x^3 + y^3 - axy = 0$$

dargestellte Kurve. Hier ist

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - ay, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - ax$$

und daraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 - ay}{3y^2 - ax}.$$

Um weitere Anwendungen des vorstehenden zu geben, wollen wir einige wichtige geometrische und physikalische Eigenschaften von Parabel, Ellipse, Hyperbel ableiten.

§ 11. Die Brennpunktseigenschaften der Parabel.

Wird die Gleichung der Parabel in der Form (Fig. 50)

$$1) \quad F(xy) = y^2 - 2px = 0$$

geschrieben, so erhalten wir

$$2) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -2p, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y$$

und demgemäss

$$3)\quad \frac{dy}{dx}=\frac{2p}{2y}=\frac{p}{y}.$$

Wir stellen nun die Gleichung der Tangente im Punkte P auf, dessen Koordinaten x und y sind. Bezeichnen wir die variabeln Koordinaten der Punkte der Tangente durch X und Y, so ist die Gleichung der Tangente jedenfalls von der Form (S. 12)

$$Y=X.\operatorname{tg}\tau+b$$

und da sie durch den Punkt (xy) geht, so ist auch

$$y=x\operatorname{tg}\tau+b,$$

woraus durch Subtraktion

$$4)\quad Y-y=(X-x)\operatorname{tg}\tau$$

als die gesuchte Gleichung folgt, wie übrigens im ersten Kapitel (S. 17) bereits allgemein abgeleitet worden ist. Setzen wir hier für $\operatorname{tg}\tau$ seinen Wert nach Gl. 3) ein, so folgt

$$Y-y=(X-x)\frac{p}{y}\quad\text{oder}$$

$$Yy-y^2=pX-px.$$

Ersetzen wir noch y^2 nach Gl. 1) durch $2px$, so erhalten wir schliesslich

$$5)\quad Yy=p(X+x)$$

als endliche Form der Gleichung der Parabeltangente.

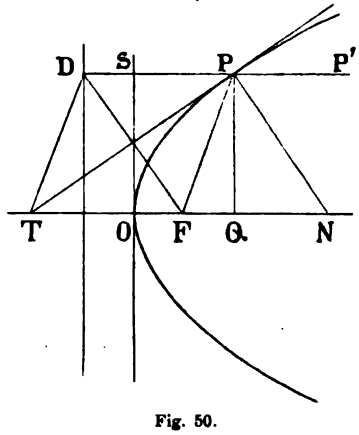


Fig. 50.

Aus der Gl. 3) sieht man zunächst, dass für $x=0$ $\operatorname{tg}\tau$ unendlich gross ist, d. h. die Tangente in O steht auf der x-Axe senkrecht; die Parabel berührt also die y-Axe. Man nennt die y-Axe die Scheiteltangente, und O selbst den Scheitel der Parabel.

Wir suchen den Schnittpunkt der Tangente im Parabelpunkte P mit der x-Axe. Wir finden den bezüglichen Wert von X aus Gl. 5), wenn wir $Y=0$ setzen, und zwar

$$6)\quad X+x=0,\quad X=-x;$$

ist daher T dieser Schnittpunkt und OQ die Abscisse x von P, so müssen wir $OT=OQ$ machen. Die Gerade PT ist dann die Tangente, womit eine sehr einfache Konstruktion der Tangente für jeden Punkt der Parabel gewonnen ist.

Wir fällen noch von P das Loth PD auf die Directrix der Parabel — sein Schnittpunkt mit der Scheiteltangente sei S — und ziehen PF und DT, so ist, wie leicht zu zeigen, $PDTF$ ein Rhombus. Nämlich es ist

$$PD = PS + SD = x + \frac{p}{2} \text{ und}$$

$$TF = TO + OF = x + \frac{p}{2}$$

und da PD und TF überdies parallel sind, so folgt bereits, dass $PDTF$ ein Parallelogramm ist. Nach der Definition der Parabel ist aber auch $PD = PF$; das Parallelogramm ist also ein Rhombus, und es folgt nun, dass TP den Winkel DPF halbiert. Errichten wir noch auf der Tangente PT in P eine Senkrechte PN — wir nennen sie Normale der Parabel — so bildet auch PN mit PF und der Verlängerung PP' von PD gleiche Winkel. Wird PF als Brennstrahl*) bezeichnet, so erhalten wir den Satz: In jedem Punkt der Parabel halbieren Tangente und Normale die Winkel, die vom Brennstrahl und der Parallelen zur Axe gebildet werden.

Diese Eigenschaft der Parabel ist wichtig für die Optik. Fallen nämlich Strahlen parallel zur Hauptaxe auf die Parabel und werden hier durch Spiegelung reflektiert, so ist für jeden Strahl PP' PF der reflektierte Strahl, d. h. sie vereinigen sich sämtlich im Punkt F, der deshalb Brennpunkt heisst. Umgekehrt, befindet sich eine Lichtquelle in F, so werden alle von F kommenden Strahlen von der Parabel parallel zur Hauptaxe reflektiert. Dies bleibt bestehen, wenn wir die Parabel um die Hauptaxe rotieren und damit die spiegelnde Linie in eine spiegelnde Fläche übergehen lassen. Hierauf beruht die Verwendung parabolischer Spiegel als Hohlspiegel, sei es als Brennspiegel oder als Beleuchtungsspiegel. Auch Hertz hat von dieser Eigenschaft der Parabel bei seinen berühmten ersten Versuchen über die Ausbreitung der Strahlen elektrischer Kraft Anwendung gemacht. Er benutzte grosse parabolische Spiegel aus Zinkblech, in deren Brennlinie der Erreger resp. der Empfänger der elektrischen Schwingungen gestellt war. Die elektrischen Strahlen gingen vom Erreger zu dem ersten parabolischen Spiegel, wurden von dort parallel reflektiert, trafen dann den zweiten parabolischen Spiegel wiederum parallel zur Axe und liefen endlich in dem Empfänger zusammen.

Da sich in dem Rhombus $PDTF$ die Diagonalen halbieren und aufeinander senkrecht stehen, so folgt übrigens noch, dass der Fusspunkt des vom Brennpunkt F auf die Parabeltangente gefällten Lothes auf der Scheiteltangente liegt.

---

*) Die Bedeutung geht aus dem Folgenden hervor.

§ 12. Die Brennpunktseigenschaften der Ellipse.

Ist die Gleichung der Ellipse von der Form (Fig. 51)

$$1) \quad F(xy) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so folgt

$$2) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}$$

und daher

$$3) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Die Gleichung der Tangente im Punkte $P(xy)$ ist, wenn wir dieselben Bezeichnungen benutzen, wie im vorigen Paragraphen

$$Y - y = \operatorname{tg}\tau (X - x),$$

und wenn wir hier den Wert für $\operatorname{tg}\tau$ aus 3) einsetzen, so wird sie

$$4) \quad Y - y = -\frac{b^2 x}{a^2 y}(X - x).$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit y und dividieren zugleich durch b^2, so finden wir

$$\frac{Yy}{b^2} - \frac{y^2}{b^2} = -\frac{Xx}{a^2} + \frac{x^2}{a^2}$$

oder

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

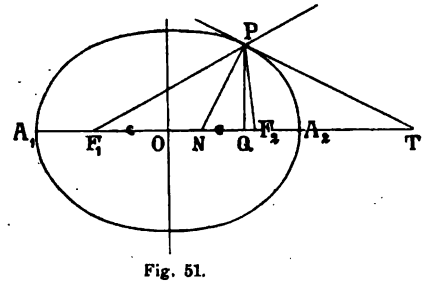


Fig. 51.

woraus sich wegen 1) die Gleichung der Tangente schliesslich in der Form

$$5) \quad \frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = 1$$

ergiebt; dabei sind xy die Koordinaten des Ellipsenpunktes, und XY die variablen Koordinaten der Punkte der Tangente.

Den Schnittpunkt T der Tangente mit der x-Axe erhalten wir, wenn wir $Y = 0$ setzen; es folgt

$$6) \quad \frac{Xx}{a^2} = 1; \quad X = \frac{a^2}{x}.^*)$$

*) Aus dieser Gleichung lässt sich eine einfache Konstruktion der Ellipsentangente entnehmen. Zunächst ist zu beachten, dass die kleine Axe b in der Formel überhaupt nicht vorkommt, es ist daher die Länge X, d. h. der Punkt T von b ganz unabhängig. Denkt man sich also über $2a$ als Axe mehrere Ellipsen und bestimmt für jede in denjenigen Punkten P, P', P''..... deren Abscisse $x = OQ$ ist, die Tangente, so gehen alle diese Tangenten durch denselben Punkt T. Unter diesen Ellipsen ist die

Hieraus lässt sich sofort folgende wichtige Eigenschaft ableiten. Wir verbinden noch F_1 und F_2 mit P und erhalten so die Strecken r_1 und r_2; für sie hatten wir im ersten Kapitel (S. 23) die Werte

$$PF_1 = r_1 = a + \frac{c}{a}x$$

$$PF_2 = r_2 = a - \frac{c}{a}x,$$

so dass

$$\frac{PF_1}{PF_2} = \frac{a + \frac{c}{a}x}{a - \frac{c}{a}x} = \frac{a^2 + cx}{a^2 - cx}$$

ist. Andrerseits ergiebt sich auf Grund von Gl. 6)

$$F_1T = X + c = \frac{a^2}{x} + c$$

$$F_2T = X - c = \frac{a^2}{x} - c,$$

also

$$\frac{F_1T}{F_2T} = \frac{\frac{a^2}{x} + c}{\frac{a^2}{x} - c} = \frac{a^2 + cx}{a^2 - cx},$$

d. h. es besteht die Proportion

$$7) \quad F_1T : F_2T = F_1P : F_2P.$$

Nun besagt aber ein Satz der Elementargeometrie, dass in jedem Dreieck die Halbierungslinie eines Aussenwinkels die gegenüber liegende Seite in zwei äussere Abschnitte teilt, die sich wie die beiden andern Seiten verhalten, und umgekehrt; durch Anwendung dieses Satzes auf das Dreieck F_1PF_2 folgt daher, dass die Tangente den Aussenwinkel von F_1PF_2 halbiert. Bezeichnen wir noch die Gerade PN, die auf der Tangente in P senkrecht steht, als Normale der Ellipse,

---

einfachste der Kreis über $2a$, für den b den besondern Wert a hat; die bezügliche Tangente dieses Kreises geht also ebenfalls durch T.

Die Konstruktion selbst lässt sich auf Grund der obigen Gleichung folgendermassen ausführen. Ist T der Schnittpunkt der Tangente mit der x-Axe, so sei OST ein rechtwinkliges Dreieck, in dem $OT = X$ die Hypotenuse, $OS = a$ eine Kathete und $OQ = x$ die Projektion der Kathete ist; in der That besteht dann die Gleichung

$$OS^2 = OT \cdot OQ.$$

Die Konstruktion ist daher folgende: Man verlängere PQ bis zum Schnitt S mit dem Kreis um O, dessen Radius a ist, und ziehe ST senkrecht zu OS, so ist TP die Tangente der Ellipse. TS ist zugleich Tangente des Kreises um O, wie bereits in dem vorherstehenden angegeben worden ist.

und $PF_1 = r_1$ resp. $PF_2 = r_2$ als Brennstrahlen, so folgt, dass die Normale den Winkel der Brennstrahlen halbiert; d. h.

Tangente und Normale einer Ellipse halbieren die von den Brennstrahlen gebildeten Winkel.

Denken wir uns in F_1 eine Lichtquelle, so ist PF_1 irgend ein von F_1 ausgehender Lichtstrahl. Ist die Ellipse eine spiegelnde Linie, so giebt die Tangente in P ihre Richtung und die Normale bildet das Einfallsloth. Der reflektierte Strahl bildet denselben Winkel mit dem Einfallsloth, wie der auffallende; da nun

$$F_1 PN = NPF_2$$

ist, so giebt PF_2 den reflektierten Strahl; alle reflektierten Strahlen vereinigen sich also in F_2, d. h.

Alle Lichtstrahlen, die von einem Brennpunkt der Ellipse ausgehen, werden von ihr so reflektiert, dass sie sich sämtlich im andern Brennpunkt vereinigen.

Dasselbe gilt von den Schallwellen und den Wärmestrahlen. Hierauf beruhen z. B. die eigentümlichen Schall konzentrierenden Wirkungen von Gewölben, Grotten u. dgl. Ebenso beruht darauf das bekannte Experiment, dass ein Stück Schwamm, das sich in dem einen Brennpunkt der Ellipse befindet, sich entzündet, wenn in den andern Brennpunkt eine glühende Kohle gebracht wird.

§ 13. Die Asymptoten der Hyperbel.

Ist die Gleichung der Hyperbel (vgl. Fig. 20 auf S. 24)

$$1) \quad F(xy) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so erhalten wir

$$2) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{2y}{b^2}$$

und hieraus

$$3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x b^2}{y a^2}.$$

Für die Gleichung der Tangente im Punkte xy haben wir, wenn wir die Koordinaten eines Tangentenpunktes wieder X, Y nennen, wie in den vorigen Paragraphen,

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x) = \frac{x}{y}\frac{b^2}{a^2}(X - x),$$

und wenn wir mit y multiplizieren und durch b^2 dividieren,

$$\frac{Yy}{b^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{xX}{a^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

resp.

$$\frac{Xx}{a^2} - \frac{Yy}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},$$

also auf Grund der Hyperbelgleichung schliesslich

$$4) \quad \frac{Xx}{a^2} - \frac{Yy}{b^2} = 1.$$

Für den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Axe ist $Y = 0$; das zugehörige X ergiebt sich daher in der Form

$$5) \quad \frac{Xx}{a^2} = 1; \quad X = \frac{a^2}{x},$$

nebenbei bemerkt, derselbe Wert, wie bei der Ellipse (S. 187).

Im besondern interessieren die Tangenten in denjenigen Punkten der Hyperbel, die unendlich fern liegen. Wegen der Symmetrie der Hyperbel genügt es, eine von ihnen ins Auge zu fassen, nämlich die Tangente desjenigen unendlich fernen Hyperbelpunktes, der im ersten Quadranten liegt. Zunächst folgt aus Gleichung 5), da x unendlich gross ist,

$$X = 0,$$

d. h. die Tangente geht durch den Anfangspunkt. Um den Winkel, den sie mit der x-Axe bildet, aus Gleichung 3) zu finden, müssen wir das bezügliche Verhältnis von x und y ermitteln. Nun folgt aus Gleichung 1)

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1,$$

also, wie sich durch Multiplikation mit $\frac{b^2}{x^2}$ ergiebt,

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{x^2},$$

und wenn wir nun x unendlich gross setzen, folgt schliesslich für das gesuchte Verhältnis dieses x und des zugehörigen y

$$6) \quad \frac{y^2}{x^2} = \frac{b^2}{a^2}, \quad \frac{y}{x} = \frac{b}{a}.$$

Setzen wir diesen Wert in Gleichung 3) ein und bezeichnen den bezüglichen Winkel jetzt mit φ, so erhalten wir

$$7) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b} \cdot \frac{b^2}{a^2} = \frac{b}{a}.$$

Konstruieren wir nun das Rechteck, dessen Seiten den Axen parallel sind, und das auf den Axen resp. die Strecken $OA_1 = OA_2 = a$,

$OB_1 = OB_2 = b$ abschneidet, so hat die im ersten Quadranten enthaltene Diagonale genau die Lage zu den Axen, wie die betrachtete Tangente; sie geht durch den Anfangspunkt, und für den Winkel α, den sie mit der x-Axe bildet, ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Diese Diagonale ist daher mit der fraglichen Tangente identisch. Aus der Symmetrie der Hyperbel folgt sofort, dass die andere Diagonale gleichfalls die Hyperbel in einem unendlich fernen Punkte berührt. Diese beiden Tangenten heissen die Asymptoten der Hyperbel. Da sie Tangenten der Hyperbel im Unendlichen sind, so nähern sie sich der Hyperbel um so mehr an, je weiter sie verlaufen. Wir treffen also bei einer beliebigen Hyperbel dieselben Verhältnisse wieder, die wir früher bei der gleichseitigen Hyperbel kennen gelernt haben. (S. 29.)

Als Gleichungen der beiden Asymptoten erhalten wir, indem wir beachten, dass die zweite Diagonale den Winkel $\pi - \varphi$ mit der x-Axe bildet, resp.

$$Y = X \operatorname{tg} \varphi \text{ und } Y = X \operatorname{tg} (\pi - \varphi)$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung 7)

$$8) \quad \begin{aligned} \frac{X}{a} - \frac{Y}{b} &= 0 \text{ und} \\ \frac{X}{a} + \frac{Y}{b} &= 0. \end{aligned}$$

Achtes Kapitel.

Unendliche Reihen und Taylor'scher Satz.

§ 1. Beispiele unendlicher Reihen.

Man kann den periodischen Dezimalbruch 0,333 ... dessen Wert $\frac{1}{3}$ ist, in folgende Form setzen:

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\cdots$$

d. h. in die Form einer Summe aus unendlich vielen Gliedern. Es giebt also Reihen von unendlich vielen Summanden, die eine endliche Summe besitzen. Eine solche Reihe ist auch

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots$$

man vermutet sofort, wenn man nach einander die Summe von 2, 3, 4, 5 ... Gliedern bildet, dass ihre Summe die Zahl 1 ist (§ 2).

Dass nicht alle derartigen Reihen eine endliche Summe besitzen, liegt auf der Hand. Weder für die Reihe

$$1+2+3+4+\cdot\cdot$$

noch für die Reihe

$$1+1+1+1+\cdot\cdot$$

ist es der Fall. Aber selbst für die Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\cdot$$

ist die Summe nicht endlich, obwohl es zunächst so scheinen mag. Dies lässt sich leicht beweisen. Die Summe der letzten Reihe wird verkleinert, wenn wir einzelne ihrer Glieder, d. h. ihrer Summanden verkleinern, d. h. wenn wir $\frac{1}{3}$ durch $\frac{1}{4}$, ferner $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$ je durch $\frac{1}{8}$ ersetzen u. s. w., also die Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\cdots$$

bilden. Diese Reihe hat aber augenscheinlich den Wert

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots$$

und ist somit unbegrenzt gross, also auch die ursprüngliche Reihe. Ersetzen wir nun aber die positiven Vorzeichen unserer Reihe durch abwechselnde, d. h. bilden wir die Reihe

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}\cdots,$$

so hat diese wieder eine endliche Summe. Um dies zu zeigen, brauchen wir unsere Reihe nur in die beiden Formen

$$(1-\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6})+\ldots \text{ resp.}$$
$$1-(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3})-(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5})-(\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{7})\ldots.$$

zu setzen, in denen jede Klammer eine positive Zahl darstellt, und wir erkennen aus der ersten Form sofort, dass die Reihe grösser ist als das erste Glied $(1-\frac{1}{2})$, aus der zweiten, dass sie kleiner ist als 1; d. h. ihr Wert liegt zwischen 1 und $\frac{1}{2}$.

Man nennt Reihen von unendlich vielen Gliedern, deren Summe endlich ist, konvergent, solche, deren Summe unendlich gross ist, divergent.

§ 2. Die geometrische Reihe.

Das einfachste Beispiel solcher Reihen tritt schon in der Elementarmathematik auf; es ist die ins Unendliche fortgesetzte geometrische Reihe

$$1)\quad 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\ldots\ldots\ldots$$

Für sie gilt folgendes: Es besteht die Gleichung*)

$$2)\quad 1+\alpha+\alpha^2+\ldots.+\alpha^{n-1}=\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\alpha^n}{1-\alpha}.$$

Nehmen wir jetzt an, dass α ein echter Bruch ist und dass n über alle Maassen wächst, d. h. dass die unendliche Reihe (1) entsteht, so bleibt der erste Quotient der rechten Seite von 2) ungeändert, der zweite aber wird Null. Denn wenn α ein echter Bruch ist, so muss die Potenz α^n, wenn n über alle Maassen wächst, gegen Null konvergieren, und damit auch der Bruch selbst. Wir erhalten demnach als Wert der Reihe (1)

$$3)\quad 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\ldots \text{in inf.}=\frac{1}{1-\alpha}$$

und es folgt:

Die unendliche geometrische Reihe 1), in der α kleiner ist als 1, ist konvergent, und hat den Wert $1:(1-\alpha)$.

*) Vgl. Formel 53 des Anhangs.

Ersetzen wir in der Gleichung (3) α durch $-\beta$, so ergiebt sich

$$5) \quad 1-\beta+\beta^2-\beta^3+\beta^4\ldots=\frac{1}{1+\beta}.$$

Die praktische Verwendbarkeit der unendlichen Reihen hängt von der Schnelligkeit ihrer Konvergenz ab, mit andern Worten davon, wieviele ihrer Glieder man zu berechnen hat, um eine Genauigkeit bis auf eine geforderte Zahl von Dezimalstellen zu erhalten. Der günstigste Fall ist der, dass man nur mit zwei oder drei Gliedern ausreicht, und die rechnerische Nützlichkeit der Reihen ist gerade in diesen Fällen eine grosse. Wir kommen hierauf am Schluss dieses Kapitels noch einmal generell zurück, wollen doch aber bereits hier an einem Beispiel auf die zweckmässige Benutzung der geometrischen Reihe hinweisen. Handelt es sich z. B., um zunächst ein einfaches numerisches Beispiel zu geben, um die Bestimmung des Bruches $\frac{0{,}432}{0{,}998}$, so kann man folgendermassen verfahren. Man setzt

$$\frac{0{,}432}{0{,}998}=0{,}432\,\frac{1}{1-0{,}002}$$
$$=0{,}432\,\{1+0{,}002+(0{,}002)^2+\ldots\}$$

und da $0{,}002^2=0{,}000004$ ist, so sieht man sofort, dass man bis auf fünf Stellen genau

$$\frac{0{,}432}{0{,}998}=0{,}432\,.\,1{,}002$$

setzen darf. Wenn es sich also nur um eine Genauigkeit bis auf vier oder fünf Dezimalstellen handelt, so kann der gegebene Bruch ohne weiteres durch das vorstehende Produkt ersetzt werden. Ist eine grössere Genauigkeit notwendig, z. B. bis auf sieben oder acht Stellen, so reicht man mit drei Gliedern der Reihe aus; man erhält in diesem Fall

$$\frac{0{,}432}{0{,}998}=0{,}432\,(1+0{,}002+0{,}000004)$$
$$=0{,}432\,.\,1{,}002004;$$

das dritte Glied hat also die Bedeutung eines Korrektionsgliedes und jedes folgende Glied hat eine analoge Bedeutung.

§ 3. Allgemeine Sätze über Konvergenz der Reihen.

Am leichtesten lassen sich die Reihen mit abwechselnden Vorzeichen behandeln; wir betrachten sie daher zuerst, und leiten für sie folgenden wichtigen Satz ab.

Wir bezeichnen die Glieder irgend einer Reihe von nun an durch

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4 \ldots\ldots\ldots,$$

so dass der Index die Stelle des Gliedes in der Reihe angiebt, also a_m das $m$te Glied ist. Eine Reihe mit lauter abwechselnden Vorzeichen der Glieder können wir dann durch

$$1)\quad a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 \ldots\ldots$$

darstellen, wo jetzt a_1, a_2, $a_3 \ldots$ lauter positive Zahlen bedeuten. Für sie gilt der Satz:

Wenn in einer unendlichen Reihe mit abwechselnden Vorzeichen die Glieder unaufhörlich abnehmen, so hat die Reihe einen endlichen Wert, ist also konvergent.

Der Beweis ist dem des Beispiels genau nachgebildet. Wir schreiben die Reihe in die Formen

$$(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \ldots.$$
$$a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - (a_6 - a_7) - \ldots.$$

Hier sind die in den Klammern stehenden Differenzen, da die Glieder nach Annahme ununterbrochen abnehmen, sämtlich positiv; es folgt also sofort aus der ersten Form, dass die Summe der Reihe grösser als $a_1 - a_2$ ist, und aus der zweiten, dass sie kleiner als a_1 ist, sie liegt demnach zwischen a_1 und $a_1 - a_2$ und ist endlich.

Wir wenden uns nun zu den Reihen mit lauter positiven Gliedern. Wir können sie durch

$$2)\quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots\ldots$$

darstellen, wenn wir wieder die a_1, a_2, $a_3 \ldots$. sämtlich als positive Zahlen ansehen.

Ist a_m das $m$te Glied unserer Reihe, so kommen für die Frage, ob die Reihe konvergiert resp. eine endliche Summe hat, nur die Glieder in Betracht, die auf a_m folgen, d. h. die Glieder

$$3)\quad a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots\ldots,$$

die vorhergehenden $m-1$ Glieder $a_1 + a_2 + \ldots + a_{m-1}$ haben selbstverständlich eine endliche Summe. Für sie gilt folgender Satz:

Wenn in einer unendlichen Reihe mit lauter positiven Gliedern von irgend einem Gliede an der Quotient je zweier aufeinander folgender Glieder kleiner ist als 1, so ist die Reihe konvergent.

Der Beweis gestaltet sich folgendermassen. Wir nehmen dem Satze gemäss an, dass alle Quotienten

$$\frac{a_{m+1}}{a_m},\quad \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}},\quad \frac{a_{m+3}}{a_{m+2}},\ \ldots\ldots$$

kleiner sind als 1, sie sind also höchstens gleich einer Grösse α, die selbst kleiner als 1 ist. Es bestehen mithin folgende Beziehungen

$$4)\quad \begin{aligned} &\frac{a_{m+1}}{a_m} \leqq \alpha, \text{*)} \\ &\frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} \leqq \alpha, \\ &\frac{a_{m+3}}{a_{m+2}} \leqq \alpha, \\ &\frac{a_{m+4}}{a_{m+3}} \leqq \alpha \end{aligned}$$

u. s. w. u. s. w.

Multipliziert man jetzt die ersten zwei, dann die ersten drei, dann die ersten vier dieser Relationen u. s. w., so erhält man

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} \leqq \alpha, \text{ d. h. } a_{m+1} \leqq \alpha \,.\, a_m,$$

$$\frac{a_{m+2}}{a_m} \leqq \alpha^2, \text{ d. h. } a_{m+2} \leqq \alpha^2 \,.\, a_m,$$

$$\frac{a_{m+3}}{a_m} \leqq \alpha^3, \text{ d. h. } a_{m+3} \leqq \alpha^3 \,.\, a_m$$

und hieraus fliesst durch einfache Addition

$$a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} \ldots \leqq \alpha a_m + \alpha^2 a_m + \alpha^3 a_m + \ldots,$$

also, wenn wir beiderseits a_m addieren,

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots\ldots \leqq a_m (1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots.)$$

und nach § 2 Gl. 3) endlich

$$5)\quad a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots \leqq \frac{a_m}{1-\alpha}.$$

Die Reihe 3) ist daher sicher endlich, und damit auch die Reihe 2), womit der Beweis erbracht ist.

Hier möge noch ein Satz eine Stelle finden, der sich oft mit Vorteil anwenden lässt und dessen Richtigkeit in die Augen springt. Hat man irgendeine Reihe

$$6)\quad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

und weiss man, dass ihre Glieder sämtlich kleiner sind, als die entsprechenden Glieder einer gewissen konvergenten Reihe, so ist auch die Reihe 6) sicherlich konvergent.

---

*) Das Zeichen $\leqq$ bedeutet »kleiner als oder höchstens gleich«.

§ 4. Schnelligkeit der Konvergenz.

Wir haben bereits darauf hingewiesen, dass die praktische Verwendbarkeit der unendlichen Reihen von der Schnelligkeit der Konvergenz abhängt. Nicht immer wird man mit zwei oder auch drei Gliedern ausreichen. Je grösser die Zahl der Glieder ist, die man zu berücksichtigen hätte, um so weniger empfehlenswert ist natürlich die Anwendung der Reihen. Um dies von vornherein entscheiden zu können, muss man in der Lage sein, den Fehler abschätzen zu können, den man begeht, wenn man die Reihe abbricht. Hierfür giebt es ein einfaches Kriterium, das wir der Vollständigkeit halber hier mitteilen. Für die geometrischen Reihen ergiebt sich der Fehler unmittelbar aus der Gleichung 2) von § 2. Wir schreiben sie in der Form

$$1)\quad \frac{1}{1-\alpha} = 1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{n-1}+\frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

und erhalten aus ihr, indem wir wieder α durch $-\beta$ ersetzen, die Gleichung

$$2)\quad \frac{1}{1+\beta} = 1-\beta+\beta^2-\beta^3+\ldots.\pm\beta^{n-1}\mp\frac{\beta^n}{1+\beta},$$

wo das Zeichen $\pm$ davon abhängt, ob $n-1$ eine gerade oder ungerade Zahl ist; ist $n-1$ gerade, so steht bei β^{n-1} das positive und nachher das negative Zeichen, ist aber $n-1$ ungerade, so steht bei β^{n-1} das negative und nachher das positive Zeichen. Hieraus folgt sofort, dass der Fehler, den wir begehen, wenn wir resp.

$$\frac{1}{1-\alpha} \text{ und } \frac{1}{1+\beta}$$

durch die ersten n Glieder der bezüglichen Reihen ersetzen, den Wert

$$\frac{\alpha^n}{1-\alpha} \text{ resp. } \mp\frac{\beta^n}{1+\beta}$$

hat; für die zweite Reihe ist also die Summe der ersten n Glieder bald zu gross, bald zu klein.

Handelt es sich um die Reihe

$$a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots\ldots$$

von § 3, so folgt aus Gleichung 5) sofort, dass der Fehler, den man begeht, wenn man diese Reihe durch

$$a_1+a_2+\ldots\ldots+a_{m-1}$$

ersetzt, eine Grösse ist, die kleiner ist als

$$3)\quad \frac{a_m}{1-\alpha},$$

wo α die dort angegebene Bedeutung hat.

§ 5. Anwendung auf die Reihe für e.

Um für die allgemeine Theorie der unendlichen Reihen ein theoretisches Beispiel zu geben, wollen wir die im dritten Kapitel (S. 75) gegebene Bestimmung der Zahl e in ausführlicherer Form behandeln. Um e zu erhalten, waren wir von der Reihe

$$1)\quad 1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{\delta}}{1.2}+\frac{(1-\frac{1}{\delta})(1-\frac{2}{\delta})}{1.2.3}+\ldots.$$

ausgegangen und hatten zunächst folgendermassen argumentiert. Der Wert des letzten Ausdruckes steht nur in Frage, wenn δ den Wert unendlich erhält, also für $1:\delta=0$; es ergiebt sich alsdann als Grenzwert

$$2)\quad 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\text{in inf.}$$

Vom Standpunkt einer strengeren mathematischen Auffassung ist jedoch dieser Schluss, obwohl er das richtige Resultat liefert, nicht beweiskräftig; um an einem Einzelfall zu zeigen, wie man diese Fragen nach der exakten mathematischen Methode behandelt, wollen wir die obigen Ausführungen im Folgenden durch einen genauen Beweis ersetzen. Wenn nämlich δ den Wert unendlich wirklich annimmt, so wird die Zahl der Glieder unserer Reihe unendlich, und wir können daher mit ihr nur nach den Regeln der unendlichen Reihen verfahren. Wir denken uns nun zunächst δ noch endlich, aber doch schon sehr gross, und wollen nun, um den wahren Wert der obigen Reihe zu erfahren, die für unendliche Reihen abgeleiteten Sätze zu Rate ziehen. Wir fragen also erstens, ob die Reihe den Charakter der konvergenten Reihen hat, und zweitens, welches der Fehler ist, den wir begehen, wenn wir die Reihe bei irgend einem Gliede abbrechen. Dabei können wir von den beiden Anfangsgliedern vom Wert 1 absehen, d. h. wir betrachten die Reihe

$$\frac{1-\frac{1}{\delta}}{1.2}+\frac{(1-\frac{1}{\delta})(1-\frac{2}{\delta})}{1.2.3}+\frac{(1-\frac{1}{\delta})(1-\frac{2}{\delta})(1-\frac{3}{\delta})}{1.2.3.4}+\ldots$$

Für sie haben die beiden auf einander folgende Glieder a_m und a_{m+1} den Wert

$$a_m=\frac{(1-\frac{1}{\delta})(1-\frac{2}{\delta})\ldots.(1-\frac{m}{\delta})}{1.2.3\ldots m(m+1)}$$

$$a_{m+1}=\frac{(1-\frac{1}{\delta})(1-\frac{2}{\delta})\ldots.(1-\frac{m}{\delta})(1-\frac{m+1}{\delta})}{1.2.3\ldots.m(m+1)(m+2)};$$

es ist daher der Quotient

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{1-\frac{m+1}{\delta}}{m+2}$$

und da δ eine Zahl ist, die grösser ist als $m+1$, so folgt

$$3) \quad \frac{a_{m+1}}{a_m} < \frac{1}{m+2}.$$

Die Reihe ist also nach § 3 konvergent, und wenn wir ihren Wert angenähert durch die Summe ihrer ersten m Glieder ausdrücken, so hat, wie oben S. 197 gezeigt worden, der begangene Fehler höchstens den Wert

$$4) \quad a_m : (1-\frac{1}{m+2}) = a_m : \frac{m+1}{m+2} = a_m \frac{m+2}{m+1},$$

d. h. also, die Reihe der Glieder

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{\delta}}{1.2}+\frac{(1-\frac{1}{\delta})(1-\frac{2}{\delta})}{1.2.3}+\ldots\ldots$$
$$+\frac{1(1-\frac{1}{\delta})(1-\frac{2}{\delta})\ldots\ldots(1-\frac{m-1}{\delta})}{1.2.3\ldots\ldots m}$$

stellt bis auf den vorstehend angegebenen Fehler die Summe der Reihe 1 dar.

Nunmehr ist alles vorbereitet, um den gesuchten Grenzwert ohne Mühe zu finden. Wir finden ihn, wenn wir δ unendlich setzen. Dadurch nehmen die Zähler aller unserer Quotienten den einfachen Wert 1 an; d. h. es wird

$$a_m = \frac{1}{1.2.3\ldots.m} = \frac{1}{m!}$$

und der Fehler, den wir begehen, wenn wir den gesuchten Grenzwert durch die Summe der Glieder

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3!}+\ldots.+\frac{1}{(m-1)!}$$

darstellen, beträgt höchstens

$$a_m \frac{m+2}{m+1} = \frac{1}{m!}(1+\frac{1}{m+1}).$$

Für den Grenzwert selbst, d. h. für die Zahl e, erhalten wir daher

$$e = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots\ldots \text{ in inf.}$$

und wir wissen zugleich, dass der auf S. 76 abgeleitete Wert, der nur die ersten sieben Glieder berücksichtigte, sich von dem wahren Wert höchstens um

$$\frac{1}{7!}\left(1+\frac{1}{7}\right)=\frac{8}{7.7!}=\frac{1}{90.49}=0{,}00022\ldots$$

unterscheidet, was mit dem dort gefundenen Resultat übereinstimmt.

§ 6. Die Reihe von Mac Laurin.

Im Bereich naturwissenschaftlicher Untersuchungen ist es ein geläufiges Verfahren, dass man versucht, das Gesetz, das den unbekannten Verlauf eines Naturvorgangs darstellt, zunächst durch eine empirische Annäherungsformel zu ersetzen. Handelt es sich beispielsweise um die Ausdehnung eines Körpers, der bei der Temperatur Null die Länge 1 besitzt, durch die Wärme, so kann man in erster, noch grober Annäherung seine Länge l, die der Temperatur ϑ entspricht, durch eine Formel

$$1)\quad l=1+\alpha\vartheta$$

darstellen, in der α den Ausdehnungskoeffizienten bedeutet. Diese Formel entspricht der Annahme, dass die Ausdehnung mit der Temperatur proportional erfolgt. Will man eine Formel haben, die sich dem Gesetz der Längenzunahme enger anschmiegt, so setzt man

$$2)\quad l=1+\alpha\vartheta+\beta\vartheta^2,$$

in der α und β Konstanten sind, die dadurch bestimmt werden, dass man in bekannter Weise die Formel mit den Resultaten der Beobachtung vergleicht. Ist z. B. der Stab aus Platin, so sind die bezüglichen Formeln, wie durch das Experiment festgestellt worden ist,

$$l=1+0{,}00000851\,t+0{,}0000000035\,t^2;$$

es hat daher, wie ersichtlich, der Koeffizient β den Charakter eines Korrektionsgliedes. Dieses Korrektionsglied hat in dem hier vorliegenden Fall bereits einen so geringen Wert, dass die Formel für die praktischen Bedürfnisse vollständig hinreicht. Wäre dies nicht der Fall, so könnte man in der angegebenen Weise weitergehen und zunächst noch ein drittes Glied $\gamma\vartheta^3$ hinzufügen u. s. w.

Die Verallgemeinerung dieser Denkweise führt zunächst rein theoretisch auf die Frage, ob man der Formel nicht eine absolute Genauigkeit verschaffen kann. Um die absolute Genauigkeit zu erreichen, hätte man augenscheinlich sämtliche möglichen Korrektionsglieder in

die Formel aufzunehmen, d. h. man hat sich die Formel als eine unendliche Reihe

$$1+\alpha\vartheta+\beta\vartheta^2+\gamma\vartheta^3+\ldots\ldots$$

zu denken, genau in der Weise, wie wir sie vorstehend betrachtet haben. Es versteht sich von selbst, dass eine solche Reihe konvergent sein muss, wie dies bei der Natur der einzelnen Glieder als Korrektionsglieder sicher erfüllt ist.

Weitere Ueberlegungen, die sich hieran anschlossen, haben das Ergebnis zu Tage gefördert, dass man es hier mit einer Idee von grosser Fruchtbarkeit und Tragweite zu thun hat. Man ist auf diese Weise zu unendlichen Reihen gelangt, mit deren Hilfe man den Wert vieler Funktionen für einen gegebenen Wert der Variabeln numerisch einfach berechnen kann. Sie spielen überdies in allen möglichen Anwendungen eine grosse Rolle; mit ihren Eigenschaften wollen wir uns nun beschäftigen.

In dem oben angeführten Beispiel handelte es sich darum, eine Formel zu gewinnen, welche die Länge l des Stabes für jeden Wert der Temperatur darstellt. Die Länge l ist demgemäss eine Funktion der Temperatur ϑ, und diese unbekannte Funktion $f(\vartheta)$ ist es, die durch die Formel ausgedrückt werden sollte. Bezeichnen wir jetzt, indem wir zu dem allgemeinen Verfahren übergehen, die Variabele, von der die Funktion abhängt, durch x und die Funktion durch $f(x)$, so haben wir für sie eine unendliche Reihe, deren Glieder nach Potenzen von x fortschreiten, der wir also die Form

$$3)\quad f(x)=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4\ldots.$$

zu geben haben, in der A, B, C, $D\ldots$ bestimmte, aber noch unbekannte Zahlen bedeuten. Sobald die Existenz dieser Reihe einmal feststeht, so ist die ganze Aufgabe, die wir zu erledigen haben, die, dass wir die Werte von A, B, C zu ermitteln haben.

Hierzu gelangt man auf folgende einfache für alle einschlägigen Funktionen gleiche Art. Setzt man zunächst $\vartheta=0$, so ergiebt sich

$$4)\quad f(0)=A,$$

d. h. A ist der Wert, den die Funktion für $x=0$ besitzt, genau wie in der Formel 1) und 2) das konstante Glied 1 der rechten Seite die Länge des Stabes für die Temperatur $\vartheta=0$ ergab. Bildet man nun auf beiden Seiten von Gleichung 3) den Differentialquotienten, so erhält man

$$5)\quad f'(x)=B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\ldots.$$

und wenn man jetzt wieder $x=0$ setzt, so folgt

$$6)\quad f'(0)=B;\quad B=\frac{f'(0)}{1},$$

d. h. B ist gleich demjenigen Wert, den die Ableitung $f'(x)$ annimmt, wenn man x den Wert Null erteilt. Wir bilden den Differentialquotienten von Gleichung 5) und erhalten

$$7)\quad f''(x)=2C+2.3.Dx+3.4Ex^2+\ldots.$$

und wenn wir jetzt $x=0$ setzen, so folgt

$$8)\quad f''(0)=2C;\quad C=\frac{f''(0)}{1.2},$$

wo $f''(0)$ wieder den Wert bedeutet, den $f''(x)$ für $x=0$ annimmt, und wenn wir noch einmal den Differentialquotienten bilden, so ergiebt sich

$$9)\quad f'''(x)=1.2.3.D+2.3.4Ex+\ldots..$$

d. h. also

$$10)\quad f'''(0)=1.2.3.D;\quad D=\frac{f'''(0)}{1.2.3}$$

u. s. w. u. s. w. Damit haben wir die unbekannten Koeffizienten auf einfache, einheitliche Weise bestimmt; für die bezügliche Funktion $f(x)$ finden wir daher die Reihe

$$11)\quad f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)+\ldots;$$

sie führt den Namen der Mac Laurin'schen Reihe.

§ 7. Die Reihen für e^x, sin x und cos x.

Die nächstliegende Anwendung dieser Gleichung ist die, dass wir uns mit ihrer Hilfe Formeln für die einfachen Funktionen verschaffen, mit denen wir es zu thun haben. Die erste dieser Funktionen sei

$$1)\quad f(x)=e^x.$$

Wir erhalten nach Kap. VII (S. 165) für die Ableitungen die Werte

$$f'(x)=e^x,\quad f''(x)=e^x,\quad f'''(x)=e^x\ldots.,$$

also insbesondere, da $e^0=1$ ist,

$$f(0)=1,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=1,\quad f'''(0)=1\ldots.$$

und demgemäss nimmt die obige Reihe die Gestalt an

$$2)\quad e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots.. \text{ in inf.}$$

Diese Reihe wird Exponentialreihe genannt. Mit ihrer Hilfe können wir uns den Wert von e^x für einen gegebenen Wert von x ebenso

durch ein Annäherungsverfahren berechnen, wie wir uns e selbst berechnet haben. Die Formel ergiebt, wie nötig, für $x=1$ genau die Reihe, die wir früher (S. 75) für e abgeleitet haben.

Setzen wir

$$3)\quad f(x)=\sin x,$$

so erhalten wir der Reihe nach folgende Gleichungen (S. 166)

$$f'(x)=\cos x, \qquad f''(x)=-\sin x,$$
$$f'''(x)=-\cos x, \quad f^{IV}(x)=\sin x, \quad f^{V}(x)=\cos x \ldots.$$

und demgemäss wird

$$f(0)=f''(0)=f^{IV}(0)=\ldots=0,$$
$$f'(0)=1, \quad f'''(0)=-1, \quad f^{V}(0)=1\ldots.,$$

mithin erhalten wir

$$4)\quad \sin x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}\cdots\cdots\cdots$$

Analog ergiebt sich (S. 165) für

$$5)\quad f(x)=\cos x,$$
$$f'(x)=-\sin x, \quad f''(x)=-\cos x, \quad f'''(x)=\sin x,$$
$$f^{IV}(x)=\cos x, \quad f^{V}(x)=-\sin x\ldots..$$

und demgemäss

$$f'(0)=f'''(0)=f^{V}(0)=\ldots.=0,$$
$$f(0)=1, \quad f''(0)=-1, \quad f^{IV}(0)=1\ldots..,$$

also erhalten wir folgende Reihe für $\cos x$

$$5)\quad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\cdots\cdots\cdots$$

Zu beachten ist, dass gemäss den Festsetzungen von S. 60 x hier immer die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis bedeutet. Wollen wir uns z. B. die Werte von $\sin 1$ und $\cos 1$, d. h. den sinus und cosinus desjenigen Bogens berechnen, dessen Länge gleich 1 ist, der also in Graden $57^0 17' 45''$ beträgt (S. 61), so finden wir

$$\cos 1=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\frac{1}{8!}+\cdots$$

$$\sin 1=\frac{1}{1}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\ldots.$$

Benutzen wir hier die früher (S. 76) gefundenen Zahlenwerte, so folgt

$$\begin{array}{llll} 1 = 1 & \frac{1}{2!} = 0{,}5 & \frac{1}{1!} = 1 & \frac{1}{3!} = 0{,}1667 \\ \frac{1}{4!} = 0{,}0417 & \frac{1}{6!} = 0{,}0014 & \frac{1}{5!} = 0{,}0083 & \frac{1}{7!} = 0{,}0002 \\ \frac{1}{8!} = 0{,}0000 & \underline{\quad 0{,}5014} & \underline{\quad 1{,}0083} & \underline{\quad 0{,}1669} \\ \underline{\quad 1{,}0417} & & & \end{array},$$

d. h.

$$\cos 1 = 1{,}0417 - 0{,}5014 = 0{,}5403$$
$$\sin 1 = 1{,}0083 - 0{,}1669 = 0{,}8414,$$

während die wirklichen Werte 0,5403 resp. 0,8415 sind. Wir erhalten also die vierte Stelle im ersten Fall genau, im zweiten nur um eine Einheit zu klein. Es entspricht dies sehr wohl demjenigen, was wir in § 5 über die Grösse des bezüglichen Fehlers gesagt haben; die hier vorliegenden Reihen enthalten ja die nämlichen Glieder, wie die Reihe für e selbst. Dies gilt übrigens allgemein für die Reihen für $\cos x$ und $\sin x$; in ihnen treten — abgesehen vom Vorzeichen — zusammen die nämlichen Glieder auf, wie in der Reihe für e^x.

Wir wünschen schliesslich noch zu wissen, für welche Werte von x unsere Reihen brauchbar bleiben, bezüglich überhaupt konvergent sind. Nach § 3 ist für irgend eine Reihe die Konvergenz sicher vorhanden, wenn der Quotient von a_{n+1} und a_n zuletzt stets kleiner als 1 ist. Es gilt nun für die vorliegenden Reihen der wichtige Satz, dass die Konvergenz für jeden endlichen Wert von x besteht. In der Reihe für e^x, d. h. in der Reihe 2) haben die Glieder a_n und a_{n+1} die Werte

$$a_n = \frac{x^n}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

und daraus folgt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{n+1},$$

und welchen Wert auch die Zahl x haben mag, so wird sicher dieser Quotient, wenn n über alle Maassen wächst, nicht nur stets kleiner als 1 bleiben, sondern sich sogar zuletzt immer mehr dem Wert Null nähern. Ist z. B. $x = 100$, so ist, wenn für n der Reihe nach 100, 101, 102... gesetzt wird, d. h. vom 100sten Gliede an, jener Quotient resp. gleich

$$\frac{100}{101}, \frac{100}{102}, \frac{100}{103} \cdots.$$

Die Reihe ist daher stets konvergent. Bei grösseren Werten von x bedarf man allerdings einer grösseren Anzahl von Gliedern der Reihe zur Berechnung, ehe die nachfolgenden den Charakter von Korrektions-

gliedern annehmen. Natürlich hat diese Eigenschaft der Exponentialreihe nur eine theoretische Bedeutung.

Die nämlichen Verhältnisse treffen für die Reihen 4) und 6) zu. Wir können uns hier kurz darauf stützen, dass diese Reihen — abgesehen vom Vorzeichen — die nämlichen Glieder enthalten, wie die Reihe für e^x allein; wenn also für die letzte Reihe der Quotient von zwei auf einander folgenden Gliedern zuletzt stets kleiner als 1 ist, und sogar gegen Null konvergiert, so ist dies für die Reihen 4) und 6) erst recht der Fall. In praktischer Hinsicht ist zu bemerken, dass man die Reihen für cosinus und sinus nur für diejenigen Winkel zu benutzen braucht, deren Bogen zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$ liegen; aus ihnen kann man die Funktionen für alle übrigen Winkel ableiten, indem man die Gleichungen

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

u. s. w. zu Hilfe nimmt. Auf diese Weise werden die Werte für $\sin x$ und $\cos x$ wirklich bestimmt. Man sieht aus dem oben durchgeführten Beispiel, dass man bereits mit wenigen Gliedern auskommt, bei einer Genauigkeit bis auf 4 Stellen z. B. schon mit höchstens fünf, für kleine Bogen sogar mit noch weniger.

§ 8. Die Reihe von Taylor.

Um die Reihen für e^x, $\sin x$, $\cos x$ zu bestimmen, hatten wir von denjenigen Werten Gebrauch zu machen, die diese Funktionen, sowie ihre Ableitungen für $x = 0$ annehmen. Nicht alle Funktionen lassen sich in dieser Weise behandeln; so wird z. B. $\ln x$ nebst seinen sämtlichen Ableitungen (S. 166) für $x = 0$ unendlich gross. Um auch für solche Funktionen eine Reihenentwickelung zu geben, kann man eine Formel benutzen, die von Taylor stammt, und die Mac Laurin'sche als speziellen Fall unter sich enthält.

Wir haben soeben erwähnt, dass die Mac Laurin'sche Reihe mit denjenigen Werten operiert, welche die Funktion resp. deren Ableitungen für $x = 0$ annehmen; ebenso stützt sich die Taylor'sche Reihe auf diejenigen Werte, welche die Funktion resp. deren Ableitungen für irgend einen Wert $x = a$ annehmen. Sie giebt den Wert der Funktion $f(a + \xi)$, wenn alle Werte

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a) \ldots\ldots$$

bekannt sind. Die Herleitung der Taylor'schen Formel lässt sich

genau in der nämlichen Weise ausführen, wie die der Mac Laurin'schen. Wir gehen also wieder davon aus, dass eine Gleichung von der Form

$$1)\quad f(a+\xi)=A+B\xi+C\xi^2+D\xi^3+E\xi^4+\ldots.$$

besteht, in der A, B, C, D, E .:. feste, noch zu bestimmende Werte haben. Die Variabele unserer Gleichung ist jetzt ξ. Den Wert von A erhalten wir, wenn wir $\xi=0$ setzen, in der Form

$$2)\quad f(a)=A.$$

Bilden wir die Ableitung der Gleichung 1) nach ξ, so folgt

$$3)\quad f'(a+\xi)=B+2C\xi+3D\xi^2+4E\xi^3+\ldots.,$$

wo $f'(a+\xi)$ den Wert der Ableitung $f'(x)$ für $x=a+\xi$ bedeutet, und wenn wir jetzt wieder $\xi=0$ setzen, finden wir

$$4)\quad f'(a)=B,\quad B=\frac{f'(a)}{1}.$$

Durch nochmaliges Differenzieren folgt

$$5)\quad f''(a+\xi)=2C+2.3D\xi+3.4E\xi^2+\ldots,$$

woraus sich, wenn $\xi=0$ gesetzt wird,

$$6)\quad f''(a)=2C,\quad C=\frac{f''(a)}{1.2}$$

ergiebt. In dieser Weise kann man fortfahren, und erhält demnach

$$A=f(a),\quad B=\frac{f'(a)}{1},\quad C=\frac{f''(a)}{1.2},\quad D=\frac{f'''(a)}{1.2.3},\ldots.$$

so dass sich die Gleichung 1) in

$$7)\quad f(a+\xi)=f(a)+\frac{f'(a)}{1}\xi+\frac{f''(a)}{1.2}\xi^2+\frac{f'''(a)}{1.2.3}\xi^3+\ldots.$$

verwandelt. Die auf der linken Seite dieser Gleichung stehende Reihe wird als die Taylor'sche Reihe bezeichnet.*) Eine zweite derartige Reihe erhält man, wenn man ξ einen negativen Wert giebt, also durch $-\xi$ ersetzt; es ergiebt sich sofort

$$8)\quad f(a-\xi)=f(a)-\frac{f'(a)}{1}\xi+\frac{f''(a)}{1.2}\xi^2-\frac{f'''(a)}{1.2.3}\xi^3+\ldots$$

Bemerkung. Wir können mit Hilfe des Taylor'schen Satzes die im dritten Kapitel (S. 86) enthaltenen Ausführungen über die Beziehung des Differentials dy zum Zuwachs Δy noch weiter entwickeln. Wir schreiben die Taylor'sche Reihe 7), indem wir a durch x und ξ durch h ersetzen, zunächst in folgende Form:

*) Man kann die Frage stellen, wie gross der Fehler ist, den man begeht, wenn man die Taylor'sche oder Mac Laurin'sche Reihe bei irgend einem Gliede abbricht. Dieser Fehler ist offenbar gleich dem Rest aller weggebliebenen Glieder. Den Wert dieses Restes kann man abschätzen, resp. in geschlossener Form ausdrücken; auf die Methoden, die zur Berechnung dieses »Restgliedes« der Reihe führen, können wir hier nicht eingehen und verweisen dafür auf die genannten ausführlichen Lehrbücher.

$$9)\quad f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)+\ldots\ldots$$

Bezeichnen wir jetzt $f(x)$ durch y, so ist

$$f(x+h)-f(x)=\Delta f(x)=\Delta y,$$

und wenn wir dementsprechend noch h durch $\Delta x=dx$ ersetzen (S. 86) und beachten, dass

$$f'(x)=\frac{dy}{dx},\ \text{also}$$

$$hf'(x)=dx\frac{dy}{dx}=dy$$

ist, so ergiebt sich aus 9)

$$10)\quad \Delta y=dy+f''(x)\frac{(dx)^2}{1.2}+f'''(x)\cdot\frac{(dx)^3}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

Diese Gleichung giebt den genauen Wert von Δy, resp. von $\Delta y-dy$. Sie zeigt allgemein, dass die Differenz zwischen Δy und dy eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung ist, wenn dx eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung bedeutet. Auf S. 86 hatten wir dies zunächst nur für den Fall der Parabel erhärten können.

§ 9. Die logarithmische Reihe.

Es sei zunächst

$$1)\quad f(x)=\ln x.$$

Wir finden (S. 166)

$$2)\quad f'(x)=\frac{1}{x},\ f''(x)=-\frac{1}{x^2},\ f'''(x)=+\frac{1.2}{x^3},\ f''''(x)=-\frac{1.2.3}{x^4},\ldots$$

Wir setzen ferner $a=1$; dass wir gerade für a diesen Wert wählen, geschieht deshalb, weil alsdann die vorstehenden Werte der Ableitungen die einfachste Form erhalten und die Reihe demgemäss zur Berechnung am tauglichsten ist. Wir finden

$$f(1)=0, f'(1)=1,\ f''(1)=-1,\ f'''(1)=1.2,\ f''''(1)=-1.2.3,\ldots$$

und wenn wir diese Werte in Gleichung 7) des vorigen Paragraphen einsetzen,

$$3)\quad \ln(1+\xi)=\frac{\xi}{1}-\frac{\xi^2}{2}+\frac{\xi^3}{3}-\frac{\xi^4}{4}\ldots\ldots$$

Diese Reihe kann man benutzen, um die Logarithmen von Zahlen zu finden, die grösser als 1 sind, vorausgesetzt, dass die Reihe konvergiert. Die Logarithmen derjenigen Zahlen, die kleiner als 1 sind, erhalten wir, wenn wir in der letzten Gleichung dem ξ einen negativen Wert geben, also $-\xi$ dafür schreiben, resp. von der Gleichung 8) des letzten Paragraphen ausgehen. Dann finden wir

$$4)\quad \ln(1-\xi)=-\frac{\xi}{1}-\frac{\xi^2}{2}-\frac{\xi^3}{3}-\frac{\xi^4}{4}\ldots\ldots$$

Dass jetzt alle Zeichen negativ sind, entspricht der Thatsache, dass die Logarithmen aller ächten Brüche bekanntlich negative Werte haben.

Nach der Schlussbemerkung von § 3 konvergieren die vorstehenden Reihen sicher, sobald $\xi < 1$ ist; jedes Glied einer der beiden Reihen ist nämlich kleiner als das entsprechende Glied der geometrischen Reihen 3) und 5) von § 2. Ein weiteres Konvergieren ist übrigens schon deshalb ausgeschlossen, weil Logarithmen negativer Zahlen nicht existieren und demnach $1-\xi$ nicht negativ werden kann.

Setzt man $\xi = 1$, so giebt die Gleichung 4) als Wert von $\ln(0)$

$$\ln(0) = -\{1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\cdots\}$$

Der Wert von $\ln(0)$ ist bekanntlich negativ unendlich gross; wir haben uns aber bereits in § 1 überzeugt, dass die Summe der rechts stehenden Reihe unendlich ist. Die Gleichung 3) dagegen führt, wenn $\xi = 1$ gesetzt wird, auf die Reihe

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}\cdots,$$

die nach § 1 S. 193 konvergent ist. Diese Reihe giebt den Wert von $\ln 2$; ihre Summe ist 0,69325.

Bemerkung. Der Vollständigkeit halber weisen wir hier kurz darauf hin, wie man die Logarithmen der Zahlen findet, die grösser als 2 sind. Zunächst erinnern wir daran, dass

$$\ln\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right) = \ln(1+\xi) - \ln(1-\xi)$$

ist. Demgemäss folgt durch Subtraktion von Gleichung 3) und 4)

$$\ln\frac{1+\xi}{1-\xi} = 2\left\{\frac{\xi}{1}+\frac{\xi^3}{3}+\frac{\xi^5}{5}+\cdots\right\}$$

Ist nun N eine Zahl, so dass $N > 1$, so kann man stets

$$N = \frac{1+\xi}{1-\xi}$$

setzen; es ergiebt sich daraus für ξ der Wert

$$\xi = \frac{N-1}{N+1},$$

der stets ein ächter Bruch ist. Ist z. B. $N = 3$, so folgt $\xi = \frac{1}{2}$ und demgemäss finden wir

$$\ln 3 = \ln\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left\{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{2}\right)^5+\cdots\right\}$$

Hiernach kann man $\ln 3$ berechnen. Die ausführlichere Erörterung dieser Frage findet man in den in der Vorrede genannten Lehrbüchern.

§ 10. Die binomische Reihe.

Ein zweites Beispiel sei

$$1) \quad f(x) = x^n,$$

wo jetzt n eine beliebige ganze oder gebrochene Zahl sein mag. Wir finden durch Differentiation

$$f'(x) = nx^{n-1},$$
$$f''(x) = n(n-1)x^{n-2},$$
$$f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-2}$$

u. s. w. u. s. w. Wir setzen wieder $a = 1$ und erhalten

$f(1) = 1$, $f'(1) = n$, $f''(1) = n(n-1)$, $f'''(1) = n(n-1)(n-2)\ldots$,

unsere Reihe nimmt daher folgende Gestalt an

$$2) \quad (1+\xi)^n = 1 + \frac{n}{1}\xi + \frac{n.(n-1)}{1.2}\xi^2 + \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}\xi^3 + \ldots\ldots\ldots$$

Diese Reihe heisst die binomische Reihe. Setzt man in der Formel des binomischen Satzes (S. 58) $a = 1$, $b = x$, so geht sie direkt in die vorstehende Reihe über. Die vorstehende Reihe gilt aber ihrer Herleitung nach — und das ist ihre umfassendere Bedeutung — für jeden positiven oder negativen ganzen oder gebrochenen Wert von n, während die Formel des Kapitel III, § 1 nur für ganzes positives n bewiesen worden ist. Es besteht infolge davon auch noch ein formaler Unterschied zwischen der obigen Formel und dem binomischen Satz. Die Gliederzahl der Reihe 2) ist im allgemeinen unendlich gross; die Koeffizienten sind im allgemeinen sämtlich von Null verschieden; sie können nur dann den Wert Null annehmen, wenn eine der Zahlen

$$n-1,\ n-2,\ n-3,\ n-4\ldots\ldots$$

schliesslich einmal Null wird, d. h. wenn n eine ganze positive Zahl ist. Dann bricht die Reihe ab, sie hat nur eine endliche Zahl Glieder und geht direkt in die früher gegebene Formel des binomischen Satzes über. (Vgl. die letzte Anmerkung auf S. 74.)

Auch die Reihe 2) liefert sofort eine zweite, wenn wir in ihr dem ξ einen negativen Wert geben, resp. es durch $-\xi$ ersetzen. Es folgt

$$3) \quad (1-\xi)^n = 1 - \frac{n}{1}\xi + \frac{n.(n-1)}{1.2}\xi^2 - \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}\xi^3 + \ldots\ldots\ldots$$

Man kann ohne besondere Mühe nachweisen, dass unsere Reihen, welches auch der Wert von n sein mag, konvergieren, wenn ξ ein echter Bruch ist. Für die Zwecke dieses Lehrbuches kommt, wie die Beispiele zeigen werden, die Reihe vorwiegend nur für solche Werte

von ξ in Frage, die kleine Grössen sind, für die sich also die Konvergenz von selbst versteht. Wir können uns daher die Konvergenzbetrachtung ersparen und verweisen dafür auf die früher genannten Lehrbücher.

Die Art der Anwendung der binomischen Reihe geht aus folgenden Beispielen hervor. Wir behandeln zunächst einige Beispiele allgemeiner Art, nämlich

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}.$$

Hier ist $n = \frac{1}{3}$ und wir erhalten daher nach Gl. 2)

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{\frac{1}{3}}{1}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{1.2}x^2 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots.$$

oder wenn wir die Zahlenkoeffizienten ausrechnen,

$$4)\quad \sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}\frac{x}{1} - \frac{1.2}{3.3}\frac{x^2}{1.2} + \frac{1.2.5}{3.3.3}\frac{x^3}{1.2.3} - \frac{1.2.5.8}{3.3.3.3}\frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

Ein zweites Beispiel sei

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Hier ist $n = -\frac{1}{2}$ und ξ ist x^2; aus Gl. 3) folgt also

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - \frac{-\frac{1}{2}}{1}x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{1.2}x^4 - \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{1.2.3}x^6 + \ldots$$

Bei der Ausrechnung der Zahlenkoeffizienten verschwinden alle negativen Zeichen, und wir finden daher

$$5)\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{1} + \frac{1.3}{2.2}\cdot\frac{x^4}{1.2} + \frac{1.3.5}{2.2.2}\cdot\frac{x^6}{1.2.3} + \ldots.$$

Die Brauchbarkeit dieser Reihen hängt naturgemäss von der Schnelligkeit der Konvergenz, also von der Grösse von x ab. In dieser Hinsicht verweisen wir auf den letzten Paragraphen dieses Kapitels.

§ 11. Die Reihe für tg x.

Die Reihe für tg x können wir nach der Mac Laurin'schen Formel ableiten. Wir bedürfen dazu der Werte, die tg x und seine höheren Differentialquotienten für $x = 0$ annehmen. Diese Werte sind nicht so unmittelbar zu beschaffen, wie dies für die Funktionen e^x, $\sin x$, $\cos x$ möglich war; vielmehr bedienen wir uns dazu eines Kunstgriffs, den man auch für andere Funktionen mit Vorteil benutzen kann.

Bezeichnen wir zur Abkürzung

$$1) \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = y,$$

so folgt

$$2) \quad y \cos x = \sin x.$$

Durch Differentiation folgt hieraus

$$3) \quad y' \cos x - y \sin x = \cos x,$$

durch nochmaliges Differenzieren erhalten wir

$$4) \quad y'' \cos x - 2y' \sin x - y \cos x = -\sin x,$$

und wenn wir auch diese Gleichung differenzieren und die Glieder gehörig zusammenfassen,

$$5) \quad y''' \cos x - 3y'' \sin x - 3y' \cos x + y \sin x = -\cos x.$$

So kann man fortfahren; man überzeugt sich leicht, dass die auf der linken Seite auftretenden Zahlenkoeffizienten dasselbe Bildungsgesetz befolgen, wie die Binomialkoeffizienten, und dass nach n-maliger Differentiation die linke Seite den Wert

$$6) \quad y^{(n)} \cos x - \frac{n}{1} y^{(n-1)} \sin x - \frac{n(n-1)}{1.2} y^{(n-2)} \cos x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} y^{(n-3)} \sin x + \cdots$$

erhält, während die rechte Seite die $n$te Ableitung von $\sin x$ ist (S. 166).

Aus den vorstehenden Gleichungen kann man nun die Werte, die $\operatorname{tg} x$ und seine Ableitungen für $x = 0$ annehmen, der Reihe nach entnehmen. Bezeichnen wir sie durch

$$(y)_0, \ (y')_0, \ (y'')_0, \ (y''')_0 \ldots.,$$

so folgt aus 2), aus 3), aus 4) u. s. w. der Reihe nach

$$(y)_0 = (y'')_0 = (y'''')_0 = \ldots = 0$$
$$(y')_0 = 1, \ (y''')_0 = 2, \ (y^{\mathrm{V}})_0 = 16, \ldots.$$

mithin erhalten wir

$$7) \quad \operatorname{tg} x = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.2.3} \cdot 2 + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} \cdot 16 + \cdots$$
$$= \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots\cdots$$

§ 12. Integration durch Reihen.

Wir geben endlich einige Beispiele der Integralberechnung, die sich auf die Entwickelung der Funktionen in Reihen stützen. Solche Integralbestimmungen treten auch in den Anwendungen vielfach auf; zu ihnen muss man immer seine Zuflucht nehmen, wenn andere

Methoden nicht zur Verfügung stehen. Man nennt diese Bestimmungsart der Integrale die **Integration durch Reihen.**

Das bezügliche Verfahren ist das folgende. Wir nehmen an, wir seien im stande, die in dem Integral

$$\int f(x)\,dx$$

auftretende Funktion $f(x)$ in eine konvergente Reihe zu entwickeln, die nach Potenzen von x fortschreitet, wie dies in diesem Kapitel gelehrt worden ist; d. h. es sei

$$1)\quad f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots,$$

so erhalten wir sofort durch Integration

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx&=\int(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots.)\,dx\\&=\int a_0\,dx+\int a_1x\,dx+\int a_2x^2dx+\ldots..\end{aligned}$$

und hieraus

$$2)\quad \int f(x)\,dx=a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+a_2\frac{x^3}{3}+a_3\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots+C.$$

Wir bemerken, dass diese Reihe sicherlich für alle Werte von x konvergiert, für die es die Reihe 1) thut. Wir brauchen sie nur in die Form

$$x(a_0+\frac{a_1}{2}x+\frac{a_2}{3}x^2+\frac{a_3}{4}x^3+\ldots.)$$

zu schreiben, so sehen wir auf Grund der Schlussbemerkung von § 3 (S. 196), dass die Klammer eine konvergente Reihe ist und damit auch die Reihe 2).

Wir geben sofort einige Beispiele. Das erste sei

$$1)\quad \int\frac{dx}{1+x^2}.$$

Nach § 2 (S. 194) haben wir, wenn $x^2<1$ ist,

$$2)\quad \frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8\ldots\ldots \text{ in inf.}$$

und erhalten daher

$$\begin{aligned}3)\quad \int\frac{dx}{1+x^2}&=\int(1-x^2+x^4-x^6+x^8\ldots)\,dx\\&=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}\ldots.+C.\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung ziehen wir noch eine wichtige Folgerung. Nach S. 104 hat das Integral der linken Seite den Wert arc tg x; wir erhalten daher die Gleichung

$$\text{arc tg}\,x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}\ldots..+C.$$

Um die Konstante zu bestimmen, setzen wir $x=0$, dann ist auch arc tg $x=0$, denn der Bogen, dessen Tangente gleich Null ist, ist ebenfalls Null, und es folgt daher $C=0$. Demgemäss folgt

$$4)\quad \text{arc tg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \cdots .$$

Auf diese Weise haben wir uns eine Reihenentwicklung von arc tg x verschafft; nach dem Satz von Mac Laurin würde dies nur mit Aufwand vieler Rechnungen ausführbar sein, da wir dazu die höheren Ableitungen von arc tg x nötig haben.

Setzen wir $x=1$, so ist arc tg 1 die Länge desjenigen Bogens, dessen Tangente gleich 1 ist, und dieser Bogen ist $\frac{\pi}{4}$; denn er entspricht einem Winkel von 45^0, d. h. dem achten Teil der ganzen Peripherie 2π. Es ist also arc tg $1=\frac{\pi}{4}$; wir erhalten daher für $x=1$ aus Gleichung 4)

$$5)\quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots .$$

und haben damit eine Reihe, die uns den genauen Wert von $\frac{\pi}{4}$ darstellt. Die Reihe heisst die Leibniz'sche Reihe, da Leibniz sie zuerst aufgestellt hat. Um mit ihrer Hilfe π wirklich zu berechnen, schreiben wir noch zweckmässig

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= (1-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{5}-\frac{1}{7}) + (\frac{1}{9}-\frac{1}{11}) + \cdots \\ &= \frac{2}{1.3} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{9.11} + \frac{2}{13.15} + \cdots, \text{ resp.}\end{aligned}$$

$$6)\quad \frac{\pi}{8} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{13.15} + \cdots .$$

Ein zweites Beispiel sei das Integral

$$7)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} .$$

Auf Grund der in § 10 stehenden Entwicklung erhalten wir sofort

$$8)\quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dx\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{x^4}{1.2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{x^6}{1.2.3} + \cdots\right\}$$

und daraus durch Integration

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int dx + \int \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1}dx + \int \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{x^4}{1.2}dx + \cdots + C \\ &= x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1.2}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1.2.3}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots + C.\end{aligned}$$

Dieses Beispiel können wir ebenso verwenden, wie das vorhergehende. Nach S. 104 hat das Integral der linken Seite den Wert arc sin x; wir erhalten daher die Gleichung

$$\text{arc sin } x = x + \frac{\frac{1}{2}}{1}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1.2}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1.2.3}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots C.$$

Um die Konstante zu bestimmen, setzen wir wieder $x=0$; dann ist auch arc sin $x=0$, denn der Bogen, dessen sinus Null ist, ist ebenfalls Null. Also ergiebt sich

$$9)\quad \text{arc sin } x = x + \frac{\frac{1}{2}}{1}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1.2}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1.2.3}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots$$

Auf diese Weise haben wir eine Reihe für arc sin x abgeleitet. Setzen wir hier $x=\frac{1}{2}$, so ist arc sin $x=\frac{\pi}{6}$, denn arc sin $\frac{1}{2}$ ist derjenige Bogen, dessen sinus gleich $\frac{1}{2}$ ist, und dies trifft für den Winkel von 30^0, also denjenigen Bogen zu, welcher der zwölfte Teil der ganzen Peripherie 2π ist. Wir erhalten somit

$$10)\quad \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1.3} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1.2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1.2.3}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{7} + \cdots\cdot$$

Diese Reihe eignet sich besser zur Berechnung von π, als die vorstehende; aus diesem Grunde haben wir sie hier abgeleitet.

Die wirkliche Berechnung würde sich wie folgt gestalten. Es ist

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} &&= 0{,}5\\
&\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1.3} &&= 0{,}020833\ldots.\\
&\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1.2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} &&= 0{,}002248\\
&\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1.2.3}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{7} &&= 0{,}000334\\
&&&\overline{0{,}523415.}
\end{aligned}$$

Daraus würde folgen $\pi=3{,}14049$; der Fehler beträgt also nur ein Tausendstel, obwohl wir nur die ersten vier Glieder benutzt haben. Wir sehen zugleich, in wie hohem Masse unsere Methoden denjenigen überlegen sind, die man in der Elementargeometrie zur Berechnung von π anzuwenden pflegt.

§ 13. Ermittelung unbestimmter Werte.

Eine wichtige Anwendung erfahren die Entwicklungen dieses Kapitels in folgenden Fällen. Wir haben in dem dritten Kapitel (S. 63) nachgewiesen, dass sich der Quotient

$$\frac{\sin x}{x}$$

dem Werte 1 nähert, wenn x gegen Null konvergiert. Dies können wir jetzt aus unseren Reihenentwicklungen unmittelbar entnehmen. Wir erhalten sofort (S. 203)

$$1)\quad \frac{\sin x}{x} = \frac{\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots}{x}$$

und wenn wir rechts die Division durch x Glied für Glied ausführen, so folgt, dass ganz allgemein

$$2)\quad \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} \cdots\cdots$$

ist; für $x=0$ nimmt daher die linke Seite, wie sich nun unmittelbar ergiebt, den Wert 1 an; d. h. es ist

$$3)\quad \lim_{x=0}\left[\frac{\sin x}{x}\right] = 1.$$

Dieses Verfahren können wir stets anwenden, um den Wert eines Quotienten zu ermitteln, für den die gewöhnliche Rechnungsart aus dem Grunde versagt, dass Zähler und Nenner für einen bestimmten Wert der Variabeln gleich Null werden. Ein solcher Quotient ist z. B.

$$\frac{1-(1+x)^n}{\ln(1+x)}.$$

Für $x=0$ erhält sowohl der Zähler wie der Nenner den Wert Null. Benutzen wir jetzt unsere früher abgeleiteten Reihenentwicklungen (S. 207 und 209), so folgt

$$4)\quad \frac{1-(1+x)^n}{\ln(1+x)} = \frac{1-\left\{1+\frac{n}{1}x+\frac{n.(n-1)}{1.2}x^2+\ldots.\right\}}{\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots}$$

und wenn wir im Zähler die Klammer auflösen und dann durch x heben, so ergiebt sich

$$5)\quad \frac{1-(1+x)^n}{\ln(1+x)} = \frac{-\frac{n}{1}-\frac{n.(n-1)}{1.2}x-\ldots.}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\cdots\cdots}$$

Setzen wir jetzt $x=0$, so finden wir, dass der Quotient für $x=0$ den Wert $-n$ annimmt, d. h. es ist

$$\lim_{x=0}\left[\frac{1-(1+x)^n}{\ln(1+x)}\right]=-n.$$

In manchen Fällen ist es einfacher, ein anderes Verfahren zu benutzen; in der Sache stimmt es, wie auch die folgende Entwicklung zeigen wird, mit dem vorstehenden überein. Es handele sich z. B. um den Wert, den der Quotient

$$6)\quad \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3+2x^2-x-2}$$

für $x=1$ annimmt. Für diesen Wert von x verschwindet sowohl der Zähler als der Nenner, die gewöhnliche Berechnungsart, den Quotienten durch einfaches Einsetzen des Wertes von x zu bestimmen, versagt also auch hier.

Da jetzt der fragliche Wert von x nicht $x=0$, sondern $x=1$ ist, so haben wir diesmal nicht die Reihe von Mac Laurin, sondern die Reihe von Taylor anzuwenden. Wir werden jedoch das bezügliche Verfahren sofort für den Fall durchführen, dass im Zähler und Nenner beliebige Funktionen stehen, um so zu einer allgemeinen, stets anwendbaren Regel zu gelangen.

Wir bezeichnen jetzt Zähler und Nenner durch $f(x)$ resp. $\varphi(x)$, so dass der bezügliche Quotient

$$7)\quad \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

sei. Ferner nehmen wir an, dass beide Funktionen für $x=a$ den Wert Null annehmen, so dass also

$$8)\quad f(a)=0 \text{ und } \varphi(a)=0$$

ist. Nun ist nach dem Taylor'schen Satz

$$9)\quad \begin{aligned} f(a+h)&=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a)+\dots\\ \varphi(a+h)&=\varphi(a)+h\varphi'(a)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(a)+\dots \end{aligned}$$

und daraus folgt wegen $f(a)=0$ und $\varphi(a)=0$

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}=\frac{hf'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a)+..}{h\varphi'(a)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(a)+..}$$

oder, wenn wir durch h Zähler und Nenner dividieren,

$$10) \quad \frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{f'(a)+\frac{h}{1.2}f''(a)+\ldots.}{\varphi'(a)+\frac{h}{1.2}\varphi''(a)+\ldots.}$$

Dies gilt für beliebige Werte von h, für welche die Taylor'schen Reihen konvergieren. Setzen wir nun im besondern $h=0$, so folgt

$$11) \quad \lim_{x=a}\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right] = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Wir erhalten also den gesuchten Wert des Quotienten einfach dadurch, dass wir Zähler und Nenner durch ihre Ableitung ersetzen.

In dem oben angeführten Beispiel ist im besondern

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$$
$$\varphi'(x) = 3x^2 + 4x - 1$$

und demnach $f'(1)=2$, $\varphi'(1)=6$, also

$$\frac{f'(1)}{\varphi'(1)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Der bezügliche Quotient hat also für $x=1$ den Wert $\frac{1}{3}$; d. h. es ist

$$12) \quad \lim_{x=1}\left[\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3+2x^2-x-2}\right] = \frac{1}{3}.$$

Ein zweites Beispiel sei das folgende. Es soll der Wert von

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{1-x}{\ln x}$$

für $x=1$ bestimmt werden. Wir finden

$$f'(x) = -1, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{x}$$

und demnach als Wert des Quotienten

$$13) \quad \lim_{x=1}\left[\frac{1-x}{\ln x}\right] = \frac{-1}{1} = -1.$$

Wenn dagegen

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{x^2-1}{\ln x}$$

zu bestimmen ist, so wird

$$f'(x) = 2x, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{x}$$

und damit der Wert des Quotienten

$$14) \quad \lim_{x=1}\left[\frac{x^2-1}{\ln x}\right] = \frac{2}{1} = 2.$$

Es liegt nahe zu fragen, welches der innere Grund dafür ist, dass die gewöhnlichen Rechnungsmethoden für die Auswertung der vorstehenden Quotienten versagen. Wir wollen an den Quotienten

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

anknüpfen. Durch einfaches Ausrechnen überzeugt man sich, dass

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$$
$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+1)(x+2)$$

ist; es ist daher

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+1)(x+2)}.$$

Zähler und Nenner des Quotienten enthalten daher den Faktor $x-1$. Hat man $f(x)$ und $\varphi(x)$, wie eben geschehen, in Faktoren zerlegt, so wird man durch $x-1$ heben, und findet, dass

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x + 2}$$

ist; jetzt kann man ohne weiteres $x=1$ setzen und erhält als Wert des Quotienten, wie oben, $\frac{1}{3}$. In der ursprünglichen Form von $f(x)$ und $\varphi(x)$ kann man jedoch nicht erkennen, dass beide Funktionen den Faktor $x-1$ enthalten; man erkennt es erst daran, dass Zähler und Nenner für $x=1$ den Wert Null annehmen. Dies gilt allgemein; mit anderen Worten, wenn Zähler und Nenner für $x=0$ oder $x=a$ beide zu Null werden, so heisst dies nur, dass beide den Faktor x, resp. $x-a$ enthalten, und es bedarf daher, um den Wert des Quotienten zu ermitteln, eines Verfahrens, das Zähler und Nenner von dem bezüglichen Faktor befreit. Gerade dies geschieht in den Fällen, in denen man die Reihenentwicklung benutzt, direkt; aber auch die andere Methode läuft, wovon man sich ohne Mühe überzeugen kann, hierauf hinaus.

Die Entwicklung der Funktionen in Reihen ist auch dann sehr zweckmässig, wenn es sich um die Ermittelung der wahren Werte von Quotienten handelt, bei denen Zähler und Nenner unendlich werden, ferner um Produkte, deren einer Faktor Null, deren anderer Faktor unendlich ist, und dergleichen mehr. Ein erstes Beispiel dieser Art — vgl. den Schluss von § 8 auf S. 139 — sei das folgende. Es soll der Grenzwert

$$15) \quad \lim_{a=b} \left[\frac{1}{a-b} \ln \frac{(a-x)b}{(b-x)a}\right]$$

bestimmt werden. Der bezügliche Ausdruck ist ein Produkt, dessen zweiter Faktor für $a=b$ den Wert $\ln 1=0$ annimmt, während der erste unendlich wird.

Wir setzen

$$a-x=a\left(1-\frac{x}{a}\right),\quad b-x=b\left(1-\frac{x}{b}\right),$$

so wird

$$\ln\frac{(a-x)\,b}{(b-x)\,a}=\ln\frac{ab\left(1-\frac{x}{a}\right)}{ab\left(1-\frac{x}{b}\right)}=\ln\frac{1-\frac{x}{a}}{1-\frac{x}{b}}.$$

Hieraus folgt weiter*)

$$\ln\frac{(a-x)\,b}{(b-x)\,a}=\ln\left(1-\frac{x}{a}\right)-\ln\left(1-\frac{x}{b}\right)\text{ oder (S. 207)}$$

$$=-\left\{\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}+\frac{1}{3}\frac{x^3}{a^3}+\cdot\cdot\right\}+\left\{\frac{x}{b}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{b^2}+\frac{1}{3}\frac{x^3}{b^3}+\cdot\cdot\right\}$$

$$=x\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)+\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)+\frac{x^3}{3}\left(\frac{1}{b^3}-\frac{1}{a^3}\right)+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

$$=x\frac{a-b}{ab}+\frac{x^2}{2}\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}+\frac{x^3}{3}\frac{a^3-b^3}{a^3b^3}+\cdot\cdot\cdot\cdot$$

Beachtet man nun, dass**)

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$
$$a^3-b^3=(a^2+ab+b^2)(a-b)$$
$$a^4-b^4=(a^3+a^2b+ab^2+b^3)(a-b)\text{ u. s. w.,}$$

so ergiebt sich schliesslich

$$16)\quad \ln\frac{(a-x)\,b}{(b-x)\,a}=(a-b)\left\{\frac{x}{1}\cdot\frac{1}{ab}+\frac{x^2}{2}\frac{a+b}{a^2b^2}+\frac{x^3}{3}\frac{a^2+ab+b^2}{a^3b^3}+\cdot\cdot\right\}.$$

Wenn wir diesen Wert in den Ausdruck 15) einsetzen, so hebt sich $a-b$ weg und es bleibt

$$\frac{1}{a-b}\ln\frac{(a-x)\,b}{(b-x)\,a}=\frac{x}{1}\cdot\frac{1}{ab}+\frac{x^2}{2}\frac{a+b}{a^2b^2}+\frac{x^3}{3}\frac{a^2+ab+b^2}{a^3b^3}+\cdot\cdot\cdot\cdot$$

Jetzt können wir rechts $a=b$ setzen und erhalten für diesen besonderen Fall

$$\lim_{a=b}\left[\frac{1}{a-b}\ln\frac{(a-x)\,b}{(b-x)\,a}\right]=\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}+\frac{x^3}{a^4}+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

$$=\frac{x}{a^2}\left(1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\cdot\cdot\cdot\cdot\right)$$

---

*) Vgl. Formel 20 des Anhangs.

**) Vgl. Formel 56 ff. des Anhangs.

und hieraus erhält man schliesslich nach der Summenformel der geometrischen Reihe (S. 193)

$$17) \quad \lim_{a=b} \left[\frac{1}{a-b} \ln \frac{(a-x)b}{(b-x)a}\right] = \frac{x}{a^2} \frac{1}{1-\frac{x}{a}} = \frac{x}{a(a-x)}.$$

Dementsprechend wird aus der S. 139 erhaltenen Formel 8)

$$\frac{1}{(a-b)} \ln \frac{(a-x)b}{(b-x)a} = kt$$

für $a=b$

$$\frac{x}{a(a-x)} = kt.$$

Diese letztere Formel aber haben wir bereits direkt durch Integration der Gleichung 1) von S. 138 erhalten, indem wir darin $n=1$ setzten.

Auch hier tritt die unbestimmte Form des Produktes dadurch auf, dass Zähler und Nenner denselben Faktor enthalten, der ihnen den Wert Null beilegt. Es ist der Faktor $a-b$, der, wie aus Gleichung 16) hervorgeht, auch im Wert des Logarithmus auftritt.

Erhält in dem Ausdruck

$$u = \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$$

x den Wert Null, so wird Minuendus und Subtrahendus unendlich, der Ausdruck wird also ebenfalls unbestimmt. Um seinen wahren Wert zu finden, muss man entweder die Reihenentwicklung direkt anwenden, oder ihn so umzuformen suchen, dass er ein Quotient wird, dessen Zähler und Nenner Null sind. Beides lässt sich leicht ausführen. Wir wollen den zweiten Weg einschlagen und finden

$$u = \frac{\ln(1+x) - x}{x \ln(1+x)}.$$

Hieraus erhalten wir durch Reihenentwicklung sofort

$$u = \frac{\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots - x}{x\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} \ldots\right)} = \frac{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots}{x\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} \ldots\right)}$$

und wenn wir jetzt Zähler und Nenner durch x^2 dividieren und dann $x=0$ setzen, so ergiebt sich als der gesuchte Grenzwert

$$18) \quad \lim_{x=0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right] = -\frac{1}{2}.$$

Der im Zähler und Nenner auftretende Faktor, der für beide den Wert Null bedingt, ist diesmal x^2.

Wir behandeln schliesslich einige Beispiele, in denen Zähler und Nenner beide unendlich gross werden. Ein wichtiges Beispiel dieser Art ist das folgende. Man soll den Wert

$$\lim_{x=\infty}\left[\frac{e^x}{x}\right]$$

finden. Wenn x unendlich wird, wird in der That Zähler und Nenner unendlich gross. Der wirkliche Wert dieses Quotienten ergiebt sich folgendermassen. Man hat sofort unter Anwendung der Reihe für e^x

$$\frac{e^x}{x}=\frac{1}{x}+1+\frac{x}{1.2}+\frac{x^2}{1.2.3}+\frac{x^3}{1.2.3.4}+\cdots\cdots$$

und diese Reihe nimmt sicher den Wert unendlich an, wenn x selbst unendlich wird, d. h. es ist

$$19)\qquad \lim_{x=\infty}\left[\frac{e^x}{x}\right]=\infty.$$

Man sagt daher, dass die Exponentialfunktion in einer viel höheren Ordnung unendlich wird als x selbst.

Setzt man jetzt

$$e^x=y,\text{ also } x=\ln y,$$

so ist für $x=\infty$ auch $y=\infty$ und es folgt, dass auch

$$20)\qquad \lim_{y=\infty}\left[\frac{y}{\ln y}\right]=\infty$$

ist, und daraus ergiebt sich umgekehrt, dass

$$21)\qquad \lim_{y=\infty}\left[\frac{\ln y}{y}\right]=0$$

ist. Wenn also y unendlich wird, so ist der Quotient von $\ln y$ und y gleich Null; man sagt daher, dass der Logarithmus von einer viel geringeren Ordnung unendlich wird als y selbst.

Setzt man jetzt in der letzten Gleichung endlich noch

$$y=\frac{1}{x},$$

so entspricht dem Wert $y=\infty$ der Wert $x=0$, und es ist

$$\frac{\ln y}{y}=x\ln\frac{1}{x}=-x\ln x;$$

es folgt also eine Formel für den Grenzwert des Produktes $x\ln x$, dessen einer Faktor, nämlich x, Null, und dessen anderer Faktor, nämlich $\ln x$, unendlich gross wird. Der Grenzwert ist nach 21) gleich Null, d. h. es ist

$$22)\qquad \lim_{x=0}\left[x\ln x\right]=0.$$

Hiervon kann man schliesslich noch eine Anwendung machen, indem man den Grenzwert

$$\lim_{x=0} [x^x]$$

bestimmt. Es ist*)

$$x^x = e^{x \ln x}.$$

Der gesuchte Grenzwert ist also derselbe, wie der Grenzwert von $e^{x \ln x}$ für $x = 0$. Dieser ist aber nach dem Vorigen $e^0 = 1$, also folgt

$$23) \quad \lim_{x=0} [x^x] = 1.$$

§ 14. Rechnen mit kleinen Grössen.

Ihre für den Naturforscher wichtigste Anwendung finden die in den vorstehenden Paragraphen mitgeteilten Reihenentwicklungen beim Rechnen mit kleinen Grössen; in diesem Falle genügt es meistens, von der Reihenentwicklung nur die allerersten Glieder zu verwenden, so dass aus einer ursprünglich zahllosen Reihe von Summanden ein einfacher, leicht zu handhabender Ausdruck entsteht.

Vor einem Missverständnis muss jedoch gewarnt werden. Grössen, die man in jedem Fall als »klein« bezeichnen darf, giebt es für den Naturforscher nicht. Sucht man den wahren Inhalt eines Literkolbens durch Auswägen mit Wasser zu ermitteln, so wird in fast allen Fällen eine Bestimmung bis auf ein zehntel Promille, also eine Wägung bis auf 0,1 Gramm genügen und wir werden letzteres Gewicht als eine kleine Grösse bezeichnen können, auf die es uns meistens nicht sonderlich mehr ankommen wird. Bei analytischen Wägungen hingegen, wo oft die zehntel Milligramme noch von grösstem Interesse sind, würden 0,1 Gramm Fehler fast stets eine total missglückte Analyse bedeuten. Der Astronom, der den Abstand der Planeten von einander misst, kann Entfernungen von der Grösse vieler Kilometer als gar nicht in Betracht kommend vernachlässigen; dem Physiker, der mit Messung von Lichtwellen beschäftigt ist, sind oft Entfernungen von Millionstelmillimeter für Rechnung und Beobachtung von entscheidender Bedeutung.

»Kleine Grösse« ist also ein relativer Begriff und wir können einen Betrag daher »klein« nur in Bezug auf einen zweiten, sehr viel grösseren, bezeichnen. Vernachlässigen dürfen wir also in der

*) Vgl. Formel 16 des Anhangs.

Rechnung eine Grösse nie aus dem Grunde, weil sie uns absolut klein erscheint (etwa nur nach Millionstel zählt), sondern nur dann, wenn sie als Summand neben einem sehr viel grösseren Betrag auftritt, dessen Bestimmung nicht so genau möglich oder wichtig ist, dass es auf jenen Summand noch ankäme. Um derartig kleine Grössen aber als Summanden neben sehr viel grösseren auftreten zu lassen, dazu leisten eben die Reihenentwicklungen häufig unschätzbare Dienste, wie wir nunmehr an einigen Beispielen sehen wollen. (Vgl. auch die Formelsammlung Anhang § 8).

Reduktion des Barometerstandes auf 0^0. Die Länge l einer Quecksilbersäule von konstantem Querschnitt ändert sich mit der Temperatur nach der Formel

$$l = l_0 (1 + 0{,}00018\, t),$$

worin l_0 die Länge bei der Temperatur $t = 0^0$ bezeichnet. Die bei t beobachtete Barometerhöhe l würde also bei 0^0

$$l_0 = \frac{l}{1 + 0{,}00018\, t}$$

betragen. Nun ist aber nach S. 193

$$\frac{1}{1+\alpha} = 1 - \alpha + \alpha^2 \ldots\ldots$$

oder, $\alpha = 0{,}00018\, t$ gesetzt,

$$l_0 = l(1 - 0{,}00018\, t + [0{,}00018\, t]^2 \ldots.).$$

Nun würde, selbst wenn $t = 30^0$ betragen sollte, das dritte Glied der Reihe $(0{,}00018\, t)^2$ kleiner als 0,00003, also neben 1 ganz zu vernachlässigen sein, so dass wir mit weitaus genügender Genauigkeit einfacher

$$l_0 = l(1 - 0{,}00018\, t)$$

schreiben können. Beträgt t z. B. 10^0, so haben wir von der abgelesenen Länge l einfach nur 1,8 Promille abzuziehen, eine in jedem Fall leicht im Kopf anzubringende Korrektion.

Bemerkung. Allgemein ist es nützlich, die betreffenden Gleichungen so umzuformen, dass die kleinen Grössen als Summanden neben der Einheit erscheinen. Ist eine Rechnung oder eine Messung nur z. B. bis auf einige Promille genau auszuführen, so kann man Summanden vernachlässigen, die kleiner als 0,001 sind; begnügt man sich gar nur mit einigen Prozenten, so können neben der Einheit Summanden, die kleiner als 0,01 sind, vernachlässigt werden u. s. w.

Vereinfachte hypsometrische Formel. Wir fanden früher (S. 129) für die Erhebung h über die Erdoberfläche

$$1) \quad h = \frac{B}{S} \ln \frac{B}{y};$$

nun ist selbst bei Erhebungen bis zu 1000 m immerhin B nur wenig grösser als y, so dass wir $B-y$ als klein sowohl gegen B, wie gegen y ansehen können. Bringen wir 1) auf die Form

$$h = \frac{B}{S} \ln\left(1 + \frac{B-y}{y}\right)$$

und entwickeln nach S. 207

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots.$$

so wird

$$2) \quad h = \frac{B}{S} \cdot \frac{B-y}{y}\left(1 - \frac{B-y}{2y}\right),$$

worin wir bereits häufig das in der Klammer befindliche zweite Glied vernachlässigen können.

Wir können aber auch 1) in der Form

$$h = -\frac{B}{S} \ln\left(1 - \frac{B-y}{B}\right)$$

schreiben und erhalten so durch Reihenentwicklung

$$3) \quad h = \frac{B}{S} \cdot \frac{B-y}{B}\left(1 + \frac{B-y}{2B}\right).$$

Auch diese Formel ist für mässige Erhebungen brauchbar; eine weit bessere Annäherung erhalten wir aber durch folgenden Kunstgriff. In Formel 2) ist das Korrektionsglied negativ, in 3) positiv und zwar in beiden Fällen nahe gleich gross ($\frac{B-y}{2y}$ ist ja von $\frac{B-y}{2B}$ wenig verschieden); der richtige Wert liegt also nahe zwischen

$$\frac{B}{S} \cdot \frac{B-y}{y} \text{ und } \frac{B}{S} \cdot \frac{B-y}{B};$$

die beiden Ausdrücke unterscheiden sich dadurch, dass im linken y, im rechten B im Nenner steht. Führen wir daher als mittleren Nenner $\frac{y+B}{2}$ ein, so folgt

$$4) \quad h = 2\frac{B}{S} \cdot \frac{B-y}{B+y},$$

die in der Praxis meist benutzte Formel.*)

---

*) $2\frac{B}{S}$ hat bei gegebener Temperatur (weil B und S einander proportional sind) den konstanten Wert 16000^m bei 0^0. Vgl. Kohlrausch S. 76. = Uebrigens erhält

Korrektion von mittelst Skala und Fernrohr gemessenen Ausschlägen.*) Dreht sich ein Spiegel um den Winkel φ, so beschreibt das Bild eines von ihm gespiegelten Punktes den Winkel 2φ; misst man anstatt dieses Winkels die Verschiebung e eines Punktes (Fadenkreuz eines Fernrohrs) an einer geraden Skala, die der Ruhelage der Spiegelebene parallel ist und deren Nullpunkt senkrecht zu letzterer sich befindet, so ist offenbar die Tangente des vom Spiegelbild beschriebenen Winkels 2φ

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{e}{A},$$

worin A den Abstand des Spiegels von der Skala bedeutet; es ist somit der Winkel, um den der Spiegel sich thatsächlich gedreht hat,

$$1) \quad \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{e}{A}.$$

Nun beobachtet man fast stets nur Ausschläge, die viel kleiner sind als A, so dass $\frac{e}{A}$ ein echter und meist ziemlich kleiner Bruch ist. Entwickeln wir in eine Reihe, so wird nach S. 213

$$2) \quad \varphi = \frac{e}{2A}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{e^2}{A^2} + \frac{1}{5}\frac{e^4}{A^4} \cdots\right)^{**});$$

zuweilen kann man das Glied $\frac{1}{3}\frac{e^2}{A^2}$ bereits vernachlässigen und nur sehr selten ist es nötig, das dritte Glied der Reihe hinzuzuziehen.

Da die durch einen konstanten Strom hervorgerufene dauernde Ablenkung der Magnetnadel eines Galvanometers bekanntlich der Tangente von φ proportional ist (»Tangentenboussole«), so entwickeln wir nach S. 211

$$\operatorname{tg} \varphi = \varphi + \frac{1}{3}\varphi^3 + \frac{2}{15}\varphi^5 + \ldots;$$

---

man Formel 4) direkt, wenn man in Gl. 1) [vgl. die Anmerkung auf S. 208]

$$\frac{B}{y} = \frac{1+\xi}{1-\xi}$$

setzt, so dass sich

$$\xi = \frac{B-y}{B+y}$$

ergiebt. Dass die so erzielte Annäherung besser ist, folgt direkt aus dem Umstand, dass in der Reihenentwicklung S. 208 auf die Glieder erster Ordnung sofort Glieder dritter Ordnung folgen.

*) Kohlrausch, Leitfaden der prakt. Physik. VII. Aufl. S. 208.

**) Um φ in Graden ausgedrückt zu erhalten, ist die rechte Seite der Gleichung nach S. 61 mit 57,296 zu multiplizieren.

substituieren wir nach (2) hierin

$$3) \quad \varphi = \frac{e}{2A}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{e^2}{A^2}\right),$$

so wird bei Vernachlässigung der höheren Glieder

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{e}{2A}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{e^2}{A^2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{e}{2A}\right)^3$$

oder vereinfacht

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{e}{2A}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{e^2}{A^2}\right).$$

Der durch einen momentanen Stromstoss erzeugte Ausschlag ist dem Sinus des halben Winkels proportional*); man findet leicht, indem man (3) in die Reihenentwicklung (S 203)

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^3 + \ldots$$

substituiert, genau wie oben

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{e}{4A}\left(1 - \frac{11}{32}\frac{e^2}{A^2}\right).$$

Weitere Anwendungen des Rechnens mit kleinen Grössen werden uns in der Fehlerrechnung S. 240 begegnen.

*) Vgl. z. B. Kohlrausch, Leidfaden der prakt. Physik. VII. Aufl. S. 327.

Neuntes Kapitel.

Theorie der Maxima und Minima.

§ 1. Bedingungen für ein Maximum oder Minimum.

Die nebenstehende Kurve (Fig. 52), die der Gleichung

$$1) \quad y = \sin x$$

entspricht, erreicht in denjenigen Punkten, für die die Abscisse x einen der Werte

$$\frac{\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{2}, \quad \frac{9\pi}{2} \cdots$$

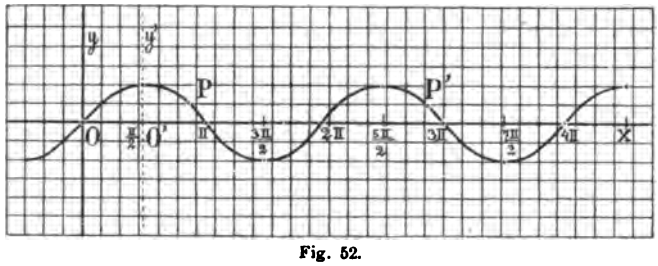


Fig. 52.

besitzt, eine höchste Lage, in denjenigen Punkten dagegen, in denen x einen der Werte

$$-\frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{7\pi}{2} \cdots$$

annimmt, ihre tiefste. Man sagt, dass sie an den erstgenannten Stellen Maxima, an den letztgenannten Minima besitzt. Dasselbe sagt man von der Ordinate der Kurve, resp. von der Funktion $\sin x$, die durch die Ordinate dargestellt wird. Die Funktion $\sin x$ besitzt daher Maxima wenn x einen der Werte

$$\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} \pm 2\pi, \quad \frac{\pi}{2} \pm 4\pi \ldots\ldots$$

hat, und Minima, wenn x resp. gleich

$$\frac{3\pi}{2},\quad \frac{3\pi}{2}\pm 2\pi,\quad \frac{3\pi}{2}\pm 4\pi \ldots .$$

ist. An allen diesen Stellen ist die Kurventangente der x-Axe parallel; für alle diese Werte von x ist also $\operatorname{tg}\tau = 0$, d. h. es ist der Differentialquotient von $\sin x$

$$2)\quad \frac{d\sin x}{dx} = \cos x = 0.$$

In der That sind die oben genannten Werte von x gerade diejenigen, für die $\cos x$ gleich Null ist.

Dies lässt sich ohne weiteres auf jede beliebige Kurve ausdehnen, die durch eine Gleichung

$$3)\quad y = f(x)$$

dargestellt wird. An allen Stellen, an denen diese Kurve ein Maximum oder Minimum hat, verläuft die Kurventangente der x-Axe parallel; an allen diesen Stellen ist daher $\operatorname{tg}\tau$ gleich Null, Für alle diese Werte von x besteht daher die Gleichung

$$4)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) = 0.^{*})$$

Dies ist diejenige Gleichung, aus der die Werte von x zu berechnen sind, für die $f(x)$ ein Maximum oder Minimum hat.

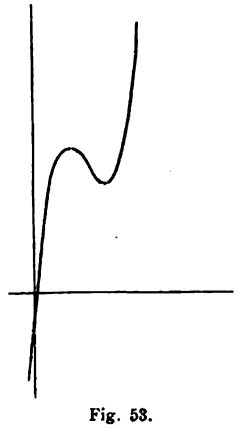


Fig. 53.

Beispielsweise hat die nebenstehende Kurve (Fig. 53) die Gleichung

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1,$$

wir finden, indem wir die Ableitung gleich Null setzen, die Gleichung

$$6(x^2 - 3x + 2) = 0$$

und haben diese Gleichung nach x aufzulösen. Die Wurzeln dieser Gleichung sind $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$; für den ersten hat y ein Maximum, für den zweiten ein Minimum.

Es fragt sich noch, wie wir allgemein entscheiden können, ob den einzelnen Werten von x, die der Gleichung 4) genügen, ein Maximum oder ein Minimum der Funktion entspricht. Ein solches Kriterium ist nötig, da uns im allgemeinen nur die Funktionen selbst, nicht aber ihre Kurven-

*) Die Bedingung, dass eine Funktion $f(x)$ ein Maximum oder ein Minimum hat, pflegt man auch kurz dadurch auszudrücken, dass man

$$\delta f(x) = 0$$

schreibt.

bilder gegeben sind. Wir kehren zu diesem Zweck zu der Figur des letzten Beispiels zurück und betrachten diejenigen Kurventeile, an denen das Maximum resp. das Minimum liegt. Die Figur zeigt unmittelbar, dass im Maximum die Kurve konkav gegen die x-Axe liegt, im Minimum konvex (S. 170); es ist daher, wie an der zitierten Stelle bewiesen wurde, für einen solchen Wert von x, für den ein Maximum eintritt,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f(x)}{dx^2} < 0,$$

für solche aber, die ein Minimum liefern,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f(x)}{dx^2} > 0.$$

Wir erhalten damit folgendes Resultat.

Um diejenigen Werte von x zu finden, für welche die Funktion $f(x)$ ein Maximum oder Minimum besitzt, hat man $f'(x) = 0$ zu setzen, und aus dieser Gleichung x zu berechnen. Ist für einen dieser Werte von x die zweite Abteilung $f(x)$ negativ, so giebt er ein Maximum der Funktion, ein Minimum dagegen, wenn die zweite Ableitung positiv ist.

In dem obigen Beispiel erhalten wir

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 6(2x - 3),$$

und für $x = 1$ ist $y'' = -6$, für $x = 2$ ist $y'' = 6$. Daher entspricht $x = 1$ einem Maximum, $x = 2$ einem Minimum, wie auch die Figur zeigt.

§ 2. Die Wendepunkte der Kurven.

Wir geben zunächst eine geometrische Anwendung des vorstehend abgeleiteten Resultates. Es soll bestimmt werden, wann eine Kurve einen Wendepunkt besitzt. Man versteht darunter, wie bereits S. 170 erwähnt wurde, einen Punkt, der einen konkaven und einen konvexen Kurventeil von einander trennt; in ihm wird die Kurve von der Kurventangente gekreuzt, so dass sie teils auf der einen, teils auf der andern Seite der Tangente liegt. Die Tangente selbst wird auch Wendetangente genannt.

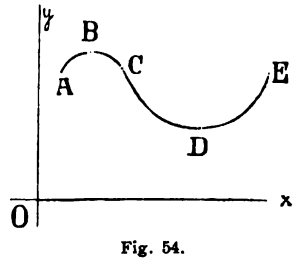


Fig. 54.

Um die Begriffe zu fixieren, wollen wir annehmen, dass die Kurve vor dem Wendepunkt konkav, hinter ihm konvex gegen die

x-Axe verlaufe, wie es Fig. 54 zeigt. Längs des konkaven Kurventeils, d. h. von A bis C nimmt $\operatorname{tg}\tau$ ununterbrochen ab, längs des konvexen Kurventeils dagegen, d. h. von C bis E nimmt $\operatorname{tg}\tau$ umgekehrt ununterbrochen zu, daher erreicht $\operatorname{tg}\tau$ im Punkte W einen Minimalwert. Umgekehrt ist es für einen konkaven Kurventeil, der sich an E anschliessen würde; alsdann ist auch E ein Wendepunkt und es erreicht $\operatorname{tg}\tau$ in ihm einen Maximalwert. Es ist leicht ersichtlich, dass einer dieser beiden Fälle stets eintreten muss, wenn eine Kurve einen Wendepunkt besitzt.

Um daher die Wendepunkte einer Kurve zu finden, haben wir diejenigen Werte von x zu suchen, für welche $\operatorname{tg}\tau = y'$ ein Maximum oder Minimum annimmt, d. h. diejenigen Werte, für die

$$\frac{d\operatorname{tg}\tau}{dx} = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

ist. Man hat also nur den zweiten Differentialquotienten gleich Null zu setzen und diejenigen Werte von x zu suchen, die dieser Bedingung genügen.

Ist z. B. die Kurve die oben betrachtete, also ihre Gleichung

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1,$$

so finden wir

$$\frac{dy}{dx} = 6(x^2 - 3x + 2), \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 6(2x - 3).$$

Der Wendepunkt, resp. seine Abscisse ergiebt sich also aus der Gleichung

$$2x - 3 = 0.$$

Sie liefert

$$x = \frac{3}{2}, \text{ wozu } y = \frac{7}{2}$$

als Ordinate gehört. Dies sind die Koordinaten des Wendepunktes, wie auch mit Fig. 53 im Einklang steht.

Hieran knüpfen wir folgende Bemerkung. Wir sahen, dass der Wert von x, für den die Funktion $y = f(x)$ ein Maximum oder Minimum erlangt, der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$$

genügt. Es kann nun der besondere Fall eintreten, dass für diesen nämlichen Wert x auch die zweite Ableitung im betrachteten Punkte den Wert Null hat, also

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

ist. Alsdann ist immer noch die Tangente der x-Axe parallel, die Kurve hat aber kein Maximum oder Minimum, sondern, wie eben bewiesen wurde, einen Wendepunkt. Eine Ausnahme würde erst dann eintreten können, wenn auch noch die dritte Ableitung Null würde. Für diesen Fall sind weitere Erörterungen nötig, auf die wir jedoch deshalb nicht einzugehen brauchen, weil bei den Aufgaben, die in den Anwendungen auftreten, sich solche Ausnahmefälle im allgemeinen nicht einstellen und man überdies von vornherein weiss, dass ein Maximum oder Minimum vorhanden ist.

Ein Beispiel zu der vorstehenden Bemerkung giebt die Kurve, deren Gleichung

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$$

ist. Für sie folgt

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x + 3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6.$$

Die Gleichung

$$3x^2 - 6x + 3 = 0$$

hat zu Wurzeln nur den Wert $x = 1$; die zugehörige Ordinate ist $y = 3$; im Punkt $x = 1$, $y = 3$ ist also die Kurventangente sicher der x-Axe parallel. Für $x = 1$ ist aber auch die zweite Ableitung Null; der bezügliche Punkt stellt daher kein Maximum der Kurve dar, sondern vielmehr einen Wendepunkt.

Für die Kurve, die das van der Waals'sche Gesetz darstellt, besteht die Gleichung (S. 33)

$$(p + \frac{a}{v^2})(v - b) = 1 + \frac{t}{273}.$$

Wir setzen noch $1 + \frac{t}{273} = c$ und haben alsdann die Gleichung

$$(p + \frac{a}{v^2})(v - b) = c,$$

woraus sich, wenn wir nach p auflösen,

$$p = \frac{c}{v - b} - \frac{a}{v^2}$$

ergiebt. Hieraus finden wir

$$\frac{dp}{dv} = \frac{-c}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3}$$

$$\frac{d^2p}{dv^2} = \frac{2c}{(v-b)^3} - \frac{2.3a}{v^4}.$$

Die Wendepunkte sind daher diejenigen, deren Koordinaten v der Gleichung

$$\frac{c}{(v-b)^3} - \frac{3a}{v^4} = 0$$

oder

$$v^4 - \frac{3a}{c}(v-b)^3 = 0$$

genügen. Dies ist eine Gleichung vierten Grades in v, nämlich

$$v^4 - \frac{3a}{c}v^3 + \frac{9a}{c}bv^2 - \frac{9ab^2}{c}v + \frac{3ab^3}{c} = 0,$$

aus der sich, wenn a, b, t bestimmte Werte haben, die bezüglichen Werte von v numerisch berechnen lassen. Wir zeigen im zehnten Kapitel, dass es im allgemeinen entweder vier Werte von v giebt, oder zwei, oder gar keinen; nur für besondere Werte von t können sich drei oder ein Wert von v als Lösung obiger Gleichung einstellen. Die Lage dieser Wendepunkte kann man aus den S. 33 und 34 stehenden Kurvenbildern entnehmen; man sieht, dass an den gezeichneten Kurvenstücken im allgemeinen nur einer auftritt, die übrigen liegen auf den fehlenden Kurventeilen.

§ 3. Das Reflexionsgesetz.

Auf der geraden Linie GH soll man einen Punkt P so finden (Fig. 55), dass die Summe seiner Entfernungen von zwei festen Punkten A und B ein Minimum ist. (Reflexionsgesetz.)

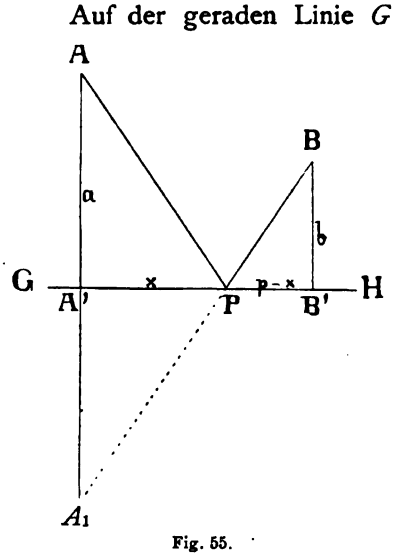


Fig. 55.

Die von A und B auf GH gefällten Lothe AA' resp. BB' mögen die Längen a und b haben; ferner sei $A'B' = p$. Wir bezeichnen die Entfernung $A'P$, wenn P zunächst ein beliebiger Punkt zwischen A' und B' ist, durch x, so ist $PB' = p - x$ und daher folgt aus den Dreiecken $AA'P$, resp. $BB'P$

$$1 \quad \begin{matrix} AP = \sqrt{a^2 + x^2} \\ BP = \sqrt{b^2 + (p-x)^2}. \end{matrix}$$

Da die Summe von AP und BP ein Minimum werden soll, so haben wir denjenigen Wert x zu suchen, für den

$$2) \quad f(x) = \sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{b^2+(p-x)^2}$$

ein Minimum wird. Wir erhalten durch Differentiation

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{(p-x)}{\sqrt{b^2+(p-x)^2}};$$

und da dies gleich Null zu setzen ist, so folgt

$$3) \quad \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{p-x}{\sqrt{b^2+(p-x)^2}}$$

als diejenige Gleichung, aus der die gesuchten Werte von x zu berechnen sind.

Diese Gleichung führt zunächst zu einem einfachen geometrischen Resultat. Bezeichnen wir mit φ und ψ die Winkel APA' resp. BPB', so ergiebt sie mit Rücksicht auf Gl. 1) direkt

$$\cos\varphi = \cos\psi,$$

das Minimum tritt also für denjenigen Punkt P ein, für den AP und BP gleiche Winkel mit der gegebenen Geraden bilden. Denken wir uns jetzt A als Lichtquelle, GH als spiegelnde Wand, so wird bekanntlich der Lichtstrahl AP nach BP gespiegelt, wenn $\varphi = \psi$ ist; d. h. das Licht, das durch Spiegelung an GH von A nach B gelangen soll, wird so gespiegelt, dass der von ihm zurückgelegte Weg ein Minimum ist.

Die wirkliche Bestimmung des Punktes P kann man jetzt einfach folgendermassen geben. Aus der Gleichheit der Winkel φ und ψ folgt sofort

$$4) \quad A'P : AA' = B'P : BB',$$

d. h. es teilt P die Strecke $A'B'$ im Verhältnis von $a : b$.

Weiter ergiebt sich durch Einsetzen der Werte in 4)

$$x : a = p - x : b$$

und daraus

$$5) \quad bx = a(p-x); \; x = \frac{ap}{a+b}.$$

Man sieht noch leicht, dass wenn man zu A den Punkt A_1 so zeichnet, dass $AA' = A'A_1$ ist, die Punkte A_1PB in einer Geraden liegen.

Um zu beweisen, dass der gefundene Punkt ein Minimum liefert, müssten wir die zweite Ableitung bilden. Man kann aber ohne Rechnung zu dem gleichen Resultat gelangen. Da wir für x nur einen

Wert gefunden haben, so brauchen wir nur zu zeigen, dass es Werte x, resp. Punkte P giebt, für welche die Summe $AP' + BP'$ grösser ist, als $AP + BP$. Dies ist, wenn wir nur P' weit genug von P entfernt nehmen, sicher der Fall; damit ist der verlangte Beweis erbracht.

§ 4. Das Brechungsgesetz.

Zwei Punkte A und B (Fig. 56) liegen auf verschiedenen Seiten einer Geraden GH; ein Punkt, der sich auf beiden Seiten dieser Geraden mit gleichförmiger, aber verschiedener Geschwindigkeit bewegt, soll in der kürzesten Zeit von A nach B gelangen. An welcher Stelle überschreitet er die Gerade GH? (Brechungsgesetz.)

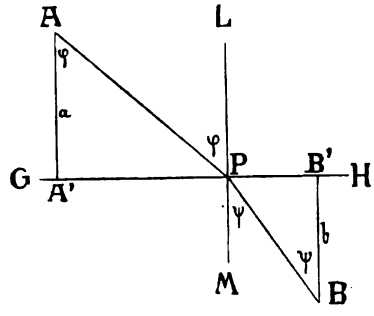


Fig. 56.

Wir fällen wieder von A und B die Lothe $AA' = a$ resp. $BB' = b$ auf GH und setzen $A'B' = p$. Ferner sei P zunächst ein beliebiger Punkt auf GH zwischen A' und B' und $x = A'P$ wieder sein Abstand von A', also $p - x$ sein Abstand von B'. Ist APB der zurückgelegte Weg und α die Geschwindigkeit auf der Strecke AP, d. h. also der Weg in einer Sekunde, so wird die Strecke AP in $\frac{AP}{\alpha}$ Sekunden zurückgelegt; ebenso folgt, dass, wenn β die Geschwindigkeit auf der Strecke BP ist, diese Strecke in $\frac{BP}{\beta}$ Sekunden zurückgelegt wird. Der Ausdruck, der ein Minimum werden soll, ist daher

$$1) \quad t = \frac{AP}{\alpha} + \frac{BP}{\beta}.$$

Nun folgt aus den Dreiecken APA' und BPB'

$$2) \quad AP = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad BP = \sqrt{b^2 + (p-x)^2}$$

also ergiebt sich

$$3) \quad t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{\alpha} + \frac{\sqrt{b^2 + (p-x)^2}}{\beta}.$$

Dieser Ausdruck ist zum Minimum zu machen. Wir differenzieren und setzen das Resultat gleich Null; d. h. wir bilden

$$4) \quad \frac{dt}{dx} = \frac{x}{\alpha\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{(p-x)}{\beta\sqrt{b^2 + (p-x)^2}} = 0.$$

Hieraus ziehen wir zunächst wieder ein geometrisches Resultat. Errichten wir in P auf GH ein Loth LM und bezeichnen den Winkel APL durch φ, BPM durch ψ, so wird auch $A = \varphi$ und $B = \psi$, und es folgt

$$\sin\varphi = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad \sin\psi = \frac{p - x}{\sqrt{b^2 + (p-x)^2}},$$

die obige Gleichung geht also in

$$\frac{\sin\varphi}{\alpha} = \frac{\sin\psi}{\beta} \text{ resp. in}$$

$$5) \quad \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\alpha}{\beta}$$

über. Das Minimum tritt also für denjenigen Punkt P ein, für den die Geraden AP und BP mit dem Loth LM Winkel bilden, deren Sinus sich wie die bezüglichen Geschwindigkeiten verhalten.

Denken wir uns jetzt, dass GH zwei Medien von verschiedener Beschaffenheit trennt, und dass ein Lichtstrahl von A nach B gelangt, so ist der Weg, den er dem Brechungsgesetz gemäss zurücklegt, bekanntlich von der Art, dass der einfallende und der gebrochene Strahl, d. h. AP und BP, mit dem Einfallsloth (d. h. LM) Winkel (φ resp. ψ) bilden, deren Sinus sich umgekehrt, wie die zugehörigen Brechungskoeffizienten verhalten. Diese verhalten sich aber wieder umgekehrt, wie die Geschwindigkeiten der Lichtbewegung, und daher stellt die obige Gleichung direkt das Brechungsgesetz dar. Der Lichtstrahl wird also von A nach B so gebrochen, dass er den Weg AB in der kürzesten Zeit zurücklegt.

Die wirkliche Berechnung von x ist dem vorstehenden geometrischen Resultat gegenüber ohne Interesse und kann daher unterbleiben. Dass wirklich ein Minimum vorliegt, erkennt man ebenso, wie bei der ersten Aufgabe.

§ 5. Das Minimum der Wärmeintensität.

Es seien A und B zwei Wärmequellen, so soll man auf der Geraden AB denjenigen Punkt M finden, der am wenigsten erwärmt wird, wenn die Intensität der Wärmestrahlung dem umgekehrten Quadrate der Entfernung von der Wärmequelle proportional ist.

Es sei a die Entfernung der Punkte AB (Fig. 57), ferner x die Entfernung eines Punktes M der Geraden AB von A, so dass

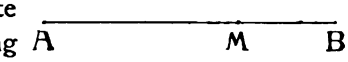


Fig. 57.

$$1) \quad MA = x, \quad MB = a - x$$

ist. Die Intensitäten der beiden Wärmequellen für den Fall, dass sich der Punkt M in der Einheit der Entfernung von ihnen befindet, mögen durch α, resp. β gegeben sein. Alsdann ist die gesamte Wärmeintensität ω, die dem Punkt M in der durch Gleichung 1) bestimmten Lage zu teil wird,

$$2) \quad \omega = \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{(a-x)^2}$$

und dieser Ausdruck ist zu einem Minimum zu machen. Wir erhalten

$$\frac{d\omega}{dx} = -\frac{2\alpha}{x^3} + \frac{2\beta}{(a-x)^3}$$

und daraus ergiebt sich als die zu lösende Gleichung

$$3) \quad \frac{2\alpha}{x^3} = \frac{2\beta}{(a-x)^3}$$

oder

$$\frac{(a-x)^3}{x^3} = \frac{\beta}{\alpha},$$

und wenn wir hieraus die dritte Wurzel ziehen,

$$4) \quad \frac{a-x}{x} = \frac{\sqrt[3]{\beta}}{\sqrt[3]{\alpha}} = \frac{\beta_1}{\alpha_1},$$

wenn $\beta_1 = \sqrt[3]{\beta}$ und $\alpha_1 = \sqrt[3]{\alpha}$ gesetzt wird. Die Abstände BM und AM verhalten sich also wie die dritten Wurzeln aus den entsprechenden Wärmeintensitäten. Durch Auflösung der letzten Gleichung folgt noch

$$5) \quad x = \frac{\alpha_1 a}{\alpha_1 + \beta_1}.$$

In diesem Fall bedarf es einer Untersuchung, ob der gefundene Wert einem Maximum oder Minimum entspricht. Man sieht leicht, dass es ein Minimum ist. Nämlich es wird

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} = \frac{2.3}{x^4} + \frac{2.3}{(a-x)^4},$$

was wegen der geraden Potenzen von x und $a-x$ jedenfalls positiv ist. Man kann sich hiervon übrigens auch direkt überzeugen; nämlich für $x=0$ oder $a-x=0$ wird gemäss Gl. 2) ω beidemal unendlich gross, und zwischen diesen Werten liegt notwendig ein Minimum von ω.

§ 6. Beispiele aus der Technik.

1. Man soll aus einem rechteckigen Flächenstück durch Ausschneiden der Ecken und Kappen der Ränder ein rechtwinkliges Gefäss bilden, dessen Inhalt ein Maximum ist.

Das gegebene Rechteck habe (Fig. 58) die Seiten a und b; x sei die Höhe des zu kappenden Randes, so ist der Inhalt I des so entstehenden Gefässes

$$1) \quad I=(a-x)(b-x)x=abx-(a+b)x^2+x^3.$$

Wir bilden

$$\frac{dI}{dx}=ab-2(a+b)x+3x^2$$

und erhalten den Wert von x, der ein Maximum giebt, durch Auflösen der Gleichung

$$2) \quad 3x^2-2(a+b)x+ab=0.$$

Aus ihr folgt

$$3) \quad x=\frac{a+b\pm\sqrt{(a+b)^2-3ab}}{3}=\frac{a+b\pm\sqrt{a^2-ab+b^2}}{3}.$$

Hier können wir nicht ohne weiteres entscheiden, welcher der beiden Werte von x das gesuchte Maximum liefert. Wir müssen daher die zweite Ableitung heranziehen. Aus Gl. 2) folgt

$$\frac{d^2I}{dx^2}=6x-2(a+b).$$

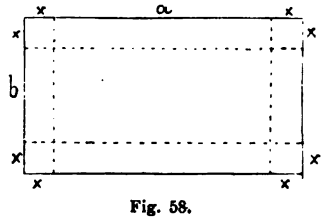


Fig. 58.

Setzen wir hier für x die Werte aus 4) ein, so folgt, dass für diese Werte

$$\frac{d^2I}{dx^2}=2(a+b)\pm2\sqrt{a^2-ab+b^2}-2(a+b)=\pm2\sqrt{a^2-ab+b^2}$$

ist. Das negative Zeichen entspricht daher einem Maximum, das positive einem Minimum. Das Maximum tritt also ein für

$$4) \quad x=\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{3}.$$

Würde man den Wert von x ausrechnen, der das Minimum liefert, so würde man finden, dass er zu gross ist, als dass sich ein Kasten wirklich herstellen liesse. Um dies zu erklären, denke man daran, dass uns die Rechnung die sämtlichen Maxima und Minima der Funktion I giebt, unabhängig davon, ob sie eine reelle Bedeutung für die ursprüngliche Aufgabe haben oder nicht.

2. Eine gegebene Kreisfläche soll durch Ausscheidung eines Sektors so gefaltet werden, dass der entstehende kegelförmige Filter den grössten Inhalt besitzt.

Wir betrachten der Einfachheit halber den Radius der gegebenen Kreisfläche (Fig. 59) als Längeneinheit und bezeichnen den Bogen desjenigen Kreissektors, aus dem die Kegelfläche gebildet wird, durch φ, in dem S. 60 definierten Sinn. Dieser Bogen bildet die Peripherie des Grundkreises des Kegels; bezeichnen wir den Radius dieses Grundkreises durch r, so ist demnach

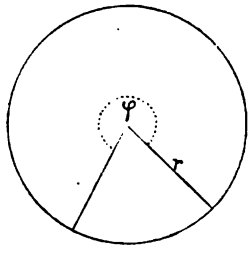


Fig. 59.

$$2r\pi = \varphi.$$

Ist nun h die Höhe des Kegels, so beträgt sein Volumen

$$5) \quad V = \frac{r^2\pi h}{3}.^*)$$

Für h erhalten wir, da h mit r ein rechtwinkliges Dreieck bildet, dessen Hypotenuse die Seite des Kegelmantels ist, und demnach den Wert 1 hat,

$$h = \sqrt{1 - r^2} = \sqrt{1 - \frac{\varphi^2}{4\pi^2}}.$$

Setzen wir diese Werte in 5) ein, so folgt

$$6) \quad V = \frac{\pi}{3}\frac{\varphi^2}{4\pi^2}\sqrt{1 - \frac{\varphi^2}{4\pi^2}} = \frac{1}{12\,.\,\pi}\varphi^2\sqrt{1 - \frac{\varphi^2}{4\pi^2}}$$

und es ist jetzt φ so zu bestimmen, dass V ein Maximum wird. Wird V ein Maximum, so wird auch das 12π-fache von V ein Maximum, nämlich

$$V_1 = 12\pi V = \varphi^2\sqrt{1 - \frac{\varphi^2}{4\pi^2}},$$

mit andern Worten, wir können bei der Rechnung von dem konstanten Faktor absehen und brauchen nur auf die Funktion V_1 unsere Regeln anzuwenden.**) Es folgt als Bedingungsgleichung für φ

$$\frac{dV_1}{d\varphi} = 2\varphi\sqrt{1 - \frac{\varphi^2}{4\pi^2}} - \varphi^2 \cdot \frac{\frac{\varphi}{4\pi^2}}{\sqrt{1 - \frac{\varphi^2}{4\pi^2}}} = 0.$$

---

*) Vgl. § 7 der Formelsammlung.

**) Dies ergiebt sich allgemein wie folgt. Soll

$$y = Cf(x)$$

ein Maximum oder Minimum werden, so hat man

$$y' = Cf'(x) = 0$$

zu setzen, d. h. man hat die Gleichung

$$f'(x) = 0$$

zu lösen, wie oben geschehen ist.

Durch Multiplikation mit der Wurzel folgt hieraus

$$7) \quad 2\varphi\left(1-\frac{\varphi^2}{4\pi^2}\right)-\frac{\varphi^3}{4\pi^2}=0.$$

Da φ nicht Null sein kann, so dürfen wir durch φ dividieren und finden

$$8) \quad 2-3\frac{\varphi^2}{4\pi^2}=0;\ \frac{\varphi}{2\pi}=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Dies ist der gesuchte Wert von φ. Dass er ein Maximum liefert, bedarf keiner weiteren Auseinandersetzung.

Um den zugehörigen Winkel in Graden zu finden, haben wir bekanntlich (S. 61), wenn x die Zahl der Grade bedeutet, die Proportion

$$\varphi : 2\pi = x : 360$$

zu benutzen. Aus ihr folgt

$$9) \quad x=\frac{\varphi}{2\pi}\cdot 360=360\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Dies ergiebt abgerundet $x=294^0$, der Winkel des auszuschaltenden Sektors beträgt daher ungefähr 66^0.

Als Filterinhalt ergiebt sich nach Gl. 5), wenn wir diesen Inhalt durch V_{max} bezeichnen,

$$10) \quad V_{max}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

In den Laboratorien pflegt man die Filter aus praktischen Gründen aus der Halbkreisfläche zu bilden.

3. Ein cylindrisches Hohlgefäss von gegebenem Inhalt I (z. B. 1 Liter) so herzustellen, dass dazu ein Minimum von Material (z. B. Blech) benutzt wird.

Das verbrauchte Material bildet den Mantel des Cylinders und die Grundfläche. Ist r der Radius der Grundfläche, und h die Höhe des Cylinders, so stellt

$$11) \quad M=r^2\pi+2r\pi h^{**})$$

die Grundfläche nebst Cylindermantel dar. Zugleich besteht die Gleichung

$$r^2\pi h=I^{*}).$$

Hieraus können wir $h\pi$ berechnen und in Gl. 11) einsetzen; diese geht alsdann in

$$12) \quad M=r^2\pi+\frac{2I}{r}$$

über; und nun ist r so zu bestimmen, dass M ein Minimum wird. Wir bilden

$$\frac{dM}{dr}=2r\pi-\frac{2I}{r^2}=0;$$

*) Vgl. § 7 der Formelsammlung.

**) Vgl. § 7 der Formelsammlung.

d. h. also

$$13)\quad 2r^3\pi = 2I;\quad r = \sqrt[3]{\frac{I}{\pi}}.$$

Ist im besondern $I = 1$, so wird

$$14)\quad r = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}.$$

Dass hier wirklich ein Minimum vorliegt, zeigt die zweite Ableitung. Es ist

$$\frac{d^2M}{dr^2} = 2\pi + \frac{4I}{r^3}$$

und dies ist für den obigen Wert von r sicher positiv.

§. 7. Fehlerrechnung.*)

Selten ist es möglich oder praktisch, eine gesuchte Grösse direkt zu messen; dann bestimmt man sie häufig in der Weise, dass eine oder mehrere andere Grössen gemessen werden, die mit jener in einer bekannten gesetzmässigen Beziehung stehen. So ermittelte man das Verbindungsgewicht des Natriums nicht direkt in der Weise, dass man etwa aus gewogenen Mengen Chlors und Natriums Chlornatrium herstellte oder gebildetes Chlornatrium in seine Bestandteile zerlegte, sondern man bestimmte die Menge Silbers, die das Natrium zu ersetzen im stande ist, und berechnete aus der als bekannt vorausgesetzten Zusammensetzung von Chlorsilber indirekt den gesuchten Wert; so erhält man bei Messung eines galvanischen Widerstandes mit der Wheatstone'schen Brücke die gesuchte Grösse nicht direkt, sondern muss sie aus dem Verhältnis der verschiedenen Brückenzweige durch Rechnung finden; so liefert die Ablesung einer Stromstärke an der Tangentenboussole nicht direkt den gesuchten Wert, sondern er muss erst aus der trigonometrischen Tangente des Ablenkungswinkels erschlossen werden u. s. w.

In allen diesen Fällen liefert die Fehlerrechnung, eine unmittelbare Anwendung der in diesem Kapitel dargelegten Rechnungsmethoden, wichtige Fingerzeige für eine sachgemässe Versuchsanordnung und kritische Berechnung der Resultate. Es sei y die gesuchte Grösse, x der direkt durch Messung erschlossene Wert, der nach der Gleichung

$$1)\quad y = f(x)$$

jene durch Rechnung zu finden erlaubt.

*) Vgl. hierzu besonders Kohlrausch, Leitf. prakt. Physik. VII. Aufl. S. 4.

Die Bestimmung von x wird nun mit einem gewissen Fehler Δx behaftet sein, der natürlich schädlich auf die Berechnung von y zurückwirkt, indem wir etwa anstatt zu dem wahren Wert y zu dem fehlerhaften $y+\Delta y$ gelangen. Der Fehler im Endresultat beträgt also

$$\Delta y = y+\Delta y - y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Nun können wir sicherlich Δx als eine kleine Grösse betrachten (andernfalls wäre die ganze Messung ja illusorisch!) und deshalb bei der Taylor'schen Reihenentwicklung (S. 206)

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \ldots$$

mit dem ersten Gliede abbrechen. Somit wird

$$2) \quad \Delta y = f'(x)\Delta x$$

und der relative Fehler*)

$$3) \quad \frac{\Delta y}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}\Delta x.$$

Gleichung 3) findet bei der kritischen Sichtung der Brauchbarkeit von nach verschiedenen Methoden erhaltenen Resultaten häufige Anwendung.

Beispiel 1.**) Man habe behufs Ermittelung des Verbindungsgewichtes des Natriums (S. 240) gefunden, dass x Teile Chlornatrium durch ein Teil gelösten Silbers gefällt werden (als Chlorsilber). Wenn A das Verbindungsgewicht des Silbers, B dasjenige des Chlors ist (die beide als bekannt vorausgesetzt werden), so ergiebt sich das gesuchte Verbindungsgewicht des Natriums y aus der Gleichung

$$(y+B) : A = x : 1$$

oder

$$y = Ax - B$$

und der relative Fehler folgt nach Gleichung 3) zu

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}\Delta x = \frac{A}{Ax-B}\Delta x$$

oder auch

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{A}{y}\Delta x = \frac{y+B}{y}\cdot\frac{\Delta x}{x}.$$

*) Offenbar ist für die Beurteilung der Genauigkeit einer Messung nicht der absolute, sondern der relative Fehler massgebend; multiplizieren wir letzteren mit 100, so erhalten wir den sogenannten prozentischen Fehler. Wenn wir ein Gewicht bis auf 0,1 g sicher ermitteln, so kann die erreichte Genauigkeit in manchen Fällen bereits äusserst gross, in andern aber gänzlich unzureichend sein, je nachdem 0,1 g einen äusserst kleinen, oder aber bereits beträchtlichen Bruchteil des Gesamtgewichts bedeutet. Vgl. auch das S. 222 über kleine Grössen Bemerkte.

**) Vgl. hierzu Ostwald, Lehrbuch der allg. Chemie II. Aufl. Bd. 1 S. 20.

Im obigen Beispiel ist

$$\frac{y+B}{y}=\frac{23+35{,}5}{23}=2{,}54;$$

ein Fehler von 0,1 Promille in der Bestimmung von x macht also y um ca. 0,25 Promille fehlerhaft. Es ist daher unvorteilhaft, wenn B erheblich grösser als y ist; im Falle des Chlorbaryums, woselbst $y=\frac{137}{2}$ (Aequivalentgewicht des Baryums), somit

$$\frac{y+B}{y}=1{,}52$$

beträgt, arbeitet die gleiche Methode (Fällung von Chlorbaryum mit Silber) erheblich vorteilhafter.

Beispiel 2. Wenn x der zur Zeit t erfolgte chemische Umsatz ist, so berechnet sich die Geschwindigkeitskonstante y (früher mit k bezeichnet) nach den Darlegungen von S. 138 ff. nach der allgemeinen Formel

$$y=\frac{1}{t}\varphi(x),$$

worin t die zu x gehörige Zeit und $\varphi(x)$ eine von der Natur der betreffenden Reaktion abhängige Funktion bedeutet; t sowohl wie x müssen bestimmt werden, um y berechnen zu können, allein in der Regel ist die Bestimmung von t so genau, dass sie mit keinem in Betracht kommenden Fehler verknüpft ist, während x mit einem merklichen Fehler Δx (der z. B. durch die Ungenauigkeit der Titration bedingt ist) behaftet sein wird. Wir finden also

$$\Delta y=\frac{1}{t}\varphi'(x)\,\Delta x.$$

Bei einer grösseren Beobachtungsreihe (wie sie z. B. Kap. V § 9 mitgeteilt ist) werden die Werte von Δx in der Regel als gleich anzusehen sein, und die Fehler der aus den verschiedenen Beobachtungsdaten berechneten Reaktionskonstanten y sind somit dem Ausdruck $\frac{\varphi'(x)}{t}$, ihre Zuverlässigkeit somit $\frac{t}{\varphi'(x)}$ proportional. Unter solchen Umständen ist es daher nicht statthaft, einfach aus den gefundenen Werten von y das Mittel zu nehmen, sondern man muss jeden Wert von y mit dem dazu gehörigen Wert von $\frac{t}{\varphi'(x)}$ (= »Gewicht der Beobachtung«) multiplizieren und durch die Summe aller Werte letzteren Ausdrucks dividieren. So entsteht die Formel

$$y = \frac{y_1 \frac{t_1}{\varphi'(x_1)} + y_2 \frac{t_2}{\varphi'(x_2)} + \dots}{\frac{t_1}{\varphi'(x_1)} + \frac{t_2}{\varphi'(x_2)} + \dots},$$

bei deren Berechnung also jede einzelne Messung nicht in gleicher (unkritischer) Weise, sondern nach Maassgabe ihrer Zuverlässigkeit verwertet wird. — Offenbar ist es in diesem Falle gleichgültig, ob wir mit dem relativen Fehler $\frac{\Delta y}{y}$ oder, wie einfacher und oben geschehen, mit dem Fehler Δy selber rechnen.

Nach Gleichung 3) wächst der relative Fehler (wie selbstverständlich) einerseits mit dem Fehler der Messung Δx, dann aber auch mit der Grösse von $\frac{f'(x)}{f(x)}$. Beide Faktoren müssen wir möglichst klein zu machen suchen, und zwar Δx, indem wir möglichst genau messen, $\frac{f'(x)}{f(x)}$ aber in der Weise, dass wir die Versuchsanordnung so wählen, dass (unbeschadet dem ersten Erfordernis) $\frac{f'(x)}{f(x)}$ zu einem Minimum wird.

Letztere Bedingung ist aber (S. 227) erfüllt, wenn die Ableitung

$$4) \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) = \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = 0$$

wird, und dieser Bedingung ist (wenn, wie allerdings häufig der Fall, aus anderweitigen Gründen ihre Erfüllung nicht unthunlich wird) im speziellen Fall nach Möglichkeit stattzugeben. Wie dies im einzelnen zu geschehen hat, werden folgende Beispiele lehren.

Messung galvanischer Widerstände in der Brückenkombination. Der gesuchte Widerstand*) y ist nach der Formel

$$5) \quad y = f(x) = w\frac{x}{l-x}$$

zu berechnen (w = Vergleichswiderstand, l = Länge der Brücke, x = Einstellung auf Stromlosigkeit). Es ist

$$f'(x) = w\frac{l}{(l-x)^2}; \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{l}{x(l-x)}$$

und schliesslich

$$\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = l\frac{2x-l}{x^2(l-x)^2}.$$

*) Kohlrausch, Leitf. prakt. Physik, VII. Aufl. S. 287.

Dieser Ausdruck wird aber offenbar gleich Null für $x=\frac{l}{2}$; der gleiche Einstellungsfehler (z. B. 0,1 mm) hat also in der Nähe der Mitte der Brücke den geringsten Einfluss auf das Endresultat und dieser Bedingung gemäss wird man, wo angängig, über die Grösse des Vergleichswiderstandes verfügen.

Messung der Stromstärke mit der Tangentenboussole. Die gesuchte Stromstärke y ist proportional der Tangente des abgelesenen Winkels x, d. h. es wird

$$y=f(x)=C\operatorname{tg}x;$$

wir finden

$$f'(x)=\frac{C}{\cos^2 x};\quad \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sin x\cos x}$$

und

$$\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}.$$

Obiger Ausdruck wird aber offenbar gleich Null für

$$\sin x=\cos x,$$

d. h. für einen Winkel von 45^0; in dieser Gegend haben also Ablesefehler den geringsten Einfluss auf das Endresultat und man wird im gegebenen Fall die Dimensionen, Windungszahl u. dgl. der Boussole so wählen, dass ein Ausschlag von dieser Grössenordnung erfolgt. (Bei Ablesung mittels Fernrohr und Skala ist es natürlich nicht möglich, diese Bedingung einzuhalten.)

In der Regel müssen wir, um eine gesuchte Grösse y zu finden, nicht eine einzige Grösse x, wie bisher angenommen, direkt messen, sondern mehrere, etwa x, w, v . . . .; dann ist der Fehler des Endresultats Δy offenbar (S. 177), wenn y aus der Gleichung

$$y=f(x, w, v\ldots)$$

zu berechnen ist:

$$\Delta y=\frac{\partial y}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial y}{\partial w}\Delta w+\frac{\partial y}{\partial v}\Delta v+\ldots.$$

und der relative Fehler entsprechend

$$6)\quad \frac{\Delta y}{y}=\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x}\Delta x+\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial w}\Delta w+\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial v}\Delta v+\ldots.$$

Die Gleichung 6) gestattet, den Einfluss der bei den einzelnen Messungen der verschiedenen Grössen begangenen Fehler auf das Endresultat zu diskutieren, wobei im einzelnen genau wie früher zu verfahren ist.

Häufig sind jedoch die durch Δw, Δv . . . verursachten Fehler so geringfügig, dass wir sie neben dem durch Δx verursachten Fehler vernachlässigen können; so müssen wir in Gleichung 5) strenggenommen auch w und l als fehlerhaft ansehen, so dass wir finden

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{l}{x(l-x)}\Delta x + \frac{1}{w}\Delta w - \frac{1}{l-x}\Delta l,$$

wodurch der Einfluss der verschiedenen Fehler klargelegt ist. Allein w sowohl wie l können im allgemeinen (durch Kalibrierung des Widerstandskastens, bezw. der Brücke) als ein für allemal so genau bestimmt angesehen werden, dass ihre Fehler nicht mehr in Frage kommen.

Ist ferner, um noch einen zweiten Fall zu betrachten, in dem Beispiel 2 S. 242 nicht nur x, sondern auch die Zeit t und die Anfangskonzentration a (= Wert für x zur Zeit $t = 0$) merklich fehlerhaft, so wird

$$\Delta y = \frac{\partial f(x,t,a)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,t,a)}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial f(x,t,a)}{\partial a}\Delta a$$

oder

$$y = \frac{1}{t} f(x,a)$$

gesetzt

$$\Delta y = \frac{1}{t}\frac{\partial f(x,a)}{\partial x}\Delta x - \frac{1}{t^2} f(x,a)\,\Delta t + \frac{1}{t}\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}\Delta a.$$

Man muss also die Werte Δx, Δt, Δa abschätzen können, um im gegebenen Falle die Zuverlässigkeit jeder einzelnen Bestimmung abwägen zu können.

Zehntes Kapitel.

Auflösung numerischer Gleichungen.

§ 1. Graphische Deutung der Gleichungen.

Für die numerische Auflösung der Gleichungen bedient man sich mit Vorteil der graphischen Darstellung. Es sei

$$1) \quad x^n + a x^{n-1} + b x^{n-2} + \ldots + p x + q = 0$$

irgend eine Gleichung, in der $a, b, c \ldots p, q$ gegebene Zahlen bedeuten sollen; es ist klar, dass jede algebraische Gleichung in diese Form übergeht, wenn man sie durch den Koeffizienten der höchsten Potenz von x dividiert. Alsdann stellt

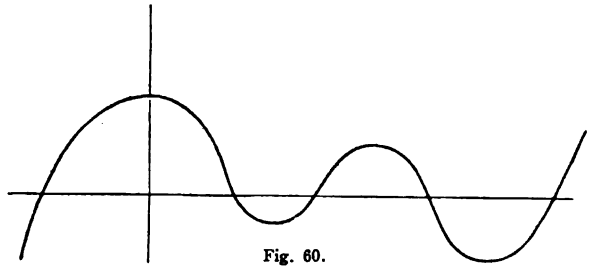


Fig. 60.

$$2) \quad y = x^n + a x^{n-1} + b x^{n-2} + \ldots + p x + q$$

die Gleichung einer Kurve dar; wir können uns von ihr, wenn nötig, so viele Punkte verschaffen, wie wir wollen, indem wir zu beliebigen Werten von x die zugehörigen Werte y berechnen. Ist (Fig. 60) P irgend ein Punkt, in dem die Kurve die x-Axe schneidet, und ξ die zugehörige Abscisse, so ist seine Ordinate $y = 0$; es besteht also die Gleichung

$$3) \quad 0 = \xi^n + a \xi^{n-1} + b \xi^{n-2} + \ldots + p \xi + q = 0,$$

und es ist ξ eine Wurzel von 1). Jeder Schnittpunkt der Kurve mit der x-Axe giebt also eine Wurzel der gegebenen Gleichung.

Die Bestimmung der Wurzeln einer Gleichung ist demnach identisch mit der Aufgabe, die Schnittpunkte der zugehörigen Kurve mit

der x-Axe zu berechnen. Es fragt sich jetzt nur, ob und wie wir uns ein gröberes oder genaueres Bild der Kurve so verschaffen können, dass es zur Ermittelung der Schnittpunkte benutzbar wird. Dies gelingt leicht mit alleiniger Hilfe der Erwägung, dass die Kurve zwischen zwei Punkten, die auf verschiedenen Seiten der x-Axe liegen, deren Ordinaten also verschiedenes Zeichen haben, die x-Axe notwendig schneidet. Es ist zweckmässig, dies sofort an bestimmten Zahlenbeispielen durchzuführen.

§ 2. Die Newton'sche Annäherungsmethode.

Es sei die gegebene Gleichung zunächst von der dritten Ordnung und laute z. B.

$$1) \quad x^3 - 7x + 1 = 0,$$

also ist die Gleichung der zugehörigen Kurve

$$2) \quad y = x^3 - 7x + 1.$$

Beachtet man, dass, wenn x sehr gross ist, x^3 die beiden folgenden Glieder weit überwiegt — dies ist schon der Fall, wenn man $x = 10$ setzt, also erst recht für grössere Werte — so folgt zunächst, dass y für sehr grosse positive Werte von x stets positiv ist und die Kurve daher über der x-Axe liegt; wenn aber x sehr grosse und negative Werte hat, so ist y stets negativ und die Kurve liegt unterhalb der x-Axe.

Man stelle jetzt folgende Tabelle zusammengehöriger Werte von x und y auf:

$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
$y = 1$	$y = -5$	$y = -5$	$y = 7$
$x = -1$	$x = -2$	$x = -3$	
$y = 7$	$y = 7$	$y = -5$;	

aus der Lage der zugehörigen Punkte folgt, dass die Kurve zwischen $x = 2$ und $x = 3$, ebenso zwischen $x = 0$ und $x = 1$, endlich auch zwischen $x = -2$ und $x = -3$ die x-Axe schneidet; denn die bezüglichen Ordinaten haben in allen drei Fällen verschiedenes Vorzeichen.

Um jetzt beispielsweise die Wurzel zu ermitteln, die zwischen 0 und 1 liegt, setzen wir

$$x = 0{,}0 \quad 0{,}1 \quad 0{,}2 \quad 0{,}3 \quad 0{,}4$$

und bestimmen die zugehörigen Werte y, nämlich

$$y = 1 \quad 0{,}401 \quad -0{,}392 \ldots\ldots$$

und sehen sofort, dass die Wurzel zwischen 0,1 und 0,2 liegen muss.

Es ist klar, dass man auf diese Weise fortfahren kann; man kann sich aber die mühsamen Rechnungen, die hier notwendig werden, erleichtern, indem man von jetzt an ein anderes Verfahren einschlägt.

Wir setzen zunächst zur Abkürzung

$$3) \quad x^3 - 7x + 1 = f(x)$$

und bezeichnen die zwischen 0,1 und 0,2 liegende Wurzel resp. ihren Wert durch ξ, so dass die Gleichung

$$4) \quad f(\xi) = \xi^3 - 7\xi + 1 = 0$$

besteht. Da die Wurzel nach vorstehender Rechnung ziemlich in der Mitte zwischen 0,1 und 0,2 zu liegen scheint, so kann man 0,15 als eine erste Annäherung betrachten; d. h. es wird

$$\xi = 0{,}15 + h$$

sein, wo h die nötige Korrektion bedeutet. Nun ist nach dem Satz von Taylor (S. 207) für die Funktion $f(x)$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots.$$

und zwar ergiebt sich in dem hier vorliegenden Fall

$$f'(x) = 3x^2 - 7$$
$$f''(x) = 6x$$
$$f'''(x) = 6,$$

während alle folgenden Ableitungen den Wert Null erhalten. Es ist daher

$$5) \quad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x).$$

Nun war

$$6) \quad \xi = 0{,}15 + h = a + h,$$

so dass $a = 0{,}15$ gesetzt ist, also folgt

$$7) \quad f(\xi) = f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(a) = 0$$

und wenn wir nun, da h ein Korrektionsglied ist, die höheren Potenzen von h vernachlässigen, so folgt, dass angenähert

$$f(a) + hf'(a) = 0, \quad h = -\frac{f(a)}{f'(a)}$$

ist. In unserem Fall folgt

$$h = -\frac{0{,}046525}{6{,}925}$$

und dies giebt angenähert

$$h = -0{,}007\ldots\ldots,$$

also 0,143 als neuen Näherungswert der Wurzel.

Jetzt setze man

$$\xi = 0{,}143 + h_1 = a_1 + h_1,$$

so ergiebt sich ebenso zur angenäherten Bestimmung von h_1 die Gleichung

$$f(a_1) + h_1 f'(a_1) = 0; \quad h_1 = -\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}$$

und in unserem Fall

$$h_1 = +\frac{0{,}001924}{6{,}9385},$$

also in weiterer Annäherung

$$h_1 = +0{,}00028$$

und 0,14328 als Wurzel. Setzt man weiter

$$\xi = 0{,}14328 + h_2 = a_2 + h_2,$$

so ist h_2 aus der Gleichung

$$f(a_2) + h_2 f'(a_2) = 0, \quad h_2 = -\frac{f(a_2)}{f'(a_2)}$$

angenähert zu bestimmen, und man findet

$$h_2 = -0{,}0000026;$$

die Wurzel ist daher

$$\xi = 0{,}1432774\ldots$$

Der genaue Wert der Wurzel bis auf 8 Stellen ist

$$x = 0{,}14327732,$$

so dass unser Wert bis auf 6 Stellen genau ist.

Die hier benutzte Methode ist bereits von Newton angegeben worden.

Ein zweites Beispiel sei die Gleichung

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0.$$

Man erhält folgende Tabelle:

$x=0,$	$x=1,$	$x=2,$	$x=3,$	$x=4,$	$x=5,$
$y=4,$	$y=-1,$	$y=-8,$	$y=-11,$	$y=-4,$	$y=19,$

$x=-1,$	$x=-2,$
$y=1,$	$y=-16,$

die bezügliche Kurve schneidet also die x-Axe zwischen den Abscissen -2 und -1, zwischen 0 und 1 und zwischen 4 und 5; zwischen je zwei dieser Zahlen liegt daher eine Wurzel der Gleichung. Wir wollen diejenige berechnen, die zwischen 4 und 5 liegt. Wir finden, dass für

$$\begin{array}{llll} x=4 & 4{,}1 & 4{,}2 & 4{,}3 \\ y=-4 & -2{,}519 & -0{,}872 & 0{,}947 \end{array}$$

ist; die Wurzel liegt also zwischen 4,2 und 4,3; wir setzen in erster Annäherung

$$a=4{,}25.$$

Wir finden der Reihe nach folgende Korrektionsglieder

$$h=-\frac{f(a)}{f'(a)}=-\frac{0{,}015625}{18{,}1875}=-0{,}000859,$$

also als zweite Annäherung für die Wurzel

$$a_1=4{,}249141.$$

Jetzt finden wir weiter

$$h_1=-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}=\frac{0{,}0000083933\ldots}{18{,}172\ldots}$$
$$=-0{,}00000046\ldots,$$

also als neue Annäherung

$$a_2=4{,}24914054\ldots$$

Im zweiten Beispiel schreitet die Annäherung viel schneller fort, als im ersten. Dies lässt sich von vornherein nicht übersehen, es kann sich immer erst während der Rechnung selbst ausweisen. Auf einen Umstand müssen wir jedoch noch generell eingehen. Es kann gelegentlich vorkommen, dass der sich ergebende Wert von h keine bessere Annäherung herbeiführt. In diesem Fall hat man den Wert von a, den man abzuschätzen hat, um eine Annäherung zu erzielen, durch einen andern zu ersetzen, der um eine Einheit der letzten Stelle verändert ist. Dies hätte z. B. geschehen müssen, wenn man im letzten Beispiel für a den Wert 4,24 angenommen hätte — was an sich näher zu liegen scheint. Aus diesem Grunde ist oben sofort $a=4{,}25$ gesetzt worden. Das Gleiche gilt für a_1 und h_1 u. s. w.

§ 3. Trennung der Wurzeln.

Nicht in allen Fällen lassen sich die ganzzahligen Intervalle, zwischen denen die Wurzeln liegen, so einfach bestimmen, wie in den beiden eben behandelten Beispielen. Ist die gegebene Gleichung die folgende

$$1)\quad f(x)=x^3-7x+7=0,$$

so ergiebt sich folgende Tabelle zusammengehöriger Werte:

$$\begin{array}{llllll} x=0, & 1, & 2, & 3\ldots\ldots \\ y=7, & 1, & 1, & 15\ldots\ldots \end{array}$$

Die zugehörige Kurve

$$2)\quad y = x^3 - 7x + 7$$

schneidet, wie wir finden werden, die x-Axe zwischen $x = 1$ und $x = 2$ zweimal, aus der obigen Tabelle geht dies aber nicht hervor, da y stets positiv ist. Jedenfalls sieht man aber aus dieser Tabelle bereits, dass die Kurve zwischen $x = 1$ und $x = 2$ ein Minimum besitzt, und die ganze Unbestimmtheit kommt daher, dass wir nicht wissen, ob dieses Minimum noch über oder bereits unter der x-Axe liegt. Um hierüber orientiert zu werden, brauchen wir nur das Minimum zu berechnen. Wir erhalten es durch Auflösung der Gleichung

$$3)\quad f'(x) = 3x^2 - 7 = 0,$$

als deren Wurzeln sich

$$4)\quad x_1 = \sqrt{\frac{7}{3}},\quad x_2 = -\sqrt{\frac{7}{3}}$$

ergeben. Die für uns in Betracht kommende Wurzel ist die erste, also $x_1 = 1{,}5\ldots$ Zu ihr finden wir

$$5)\quad y_1 = \left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^3 - 7\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right) + 7 = 7 - \frac{14}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}$$

und dies ist, wie die Ausrechnung zeigt, negativ. Daher schneidet die Kurve die x-Axe zwischen $x = 1$ und $x = 2$ in zwei verschiedenen Punkten, es liegen also die Wurzeln zwischen $x = 1$ und $x = 2$.

Um sie zu berechnen, bestimmen wir nunmehr, da das Minimum nahe bei $x = 1{,}5$ liegt, folgende Tabelle zusammengehöriger Werte.

$x =$	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7 *)
$y =$	0,097	−0,056	−0,125	−0,104	0,013.

Die eine Wurzel liegt daher zwischen 1,3 und 1,4, die andere zwischen 1,6 und 1,7. Wir wollen die letzte berechnen, indem wir jetzt wieder das oben benutzte Näherungsverfahren einschlagen.

Es ist

$$f(x) = x^3 - 7x + 7,$$
$$f'(x) = 3x^2 - 7,$$

wir setzen $a = 1{,}7$ und erhalten

$$h = -\frac{f(a)}{f'(a)} = -\frac{0{,}013}{1{,}67} = -0{,}008;$$

als erste Annäherung der Wurzel finden wir also $\xi = 1{,}692$. Die weitere Rechnung würde ebenso auszuführen sein, wie bei den anderen Beispielen.

---

*) Es bedarf kaum des Hinweises, dass man mit 1,5 und 1,6 beginnt und dann nach beiden Seiten so lange weitergeht, bis y positiv wird.

Ein zweites Beispiel dieser Art sei das folgende:

$$6)\quad f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6{,}9 = 0.$$

Wir erhalten zunächst folgende Tabelle:

$x =$	-2	-1	0	1	2	3	4
$y =$	$49{,}1$	$-0{,}9$	$-6{,}9$	$-0{,}9$	$-0{,}9$	$-0{,}9$	$29{,}1$;

es liegt also eine Wurzel zwischen -2 und -1, und eine zwischen 3 und 4. Andererseits hat die Kurve

$$7)\quad y = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6{,}9,$$

wie die Tabelle erkennen lässt, und eine zugehörige graphische Darstellung der Kurve, die man ohne Mühe entwirft, bestätigt, zwischen $x = 1$ und $x = 2$ sicher ein Maximum; es bleibt aber zunächst unentschieden, ob die zugehörige Ordinate bereits positiv ist. Wir bestimmen das Maximum, indem wir die Gleichung

$$8)\quad f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 10x + 5 = 0$$

nach x auflösen. Dies geht hier ohne grosse Mühe, da wir ja bereits wissen, dass die gesuchte Wurzel zwischen 1 und 2 liegen muss. Wir erhalten folgende Tabelle:

$x =$	$1{,}4$	$1{,}5$	$1{,}6$
$f'(x) =$	$0{,}576$	-1	$-1{,}016.$

Das Maximum liegt also zwischen 1,4 und 1,5. Wir untersuchen jetzt sofort, ob zu den vorstehenden Werten von x, resp. zu den benachbarten, bereits positive Werte von y gehören. Wir finden zu

$x =$	$1{,}3$	$1{,}4$	$1{,}5$	$1{,}6$
$y =$	$-0{,}0789$	$+0{,}0216$	$+0{,}0375$	$-0{,}1464$

und daraus folgt sofort, dass zwischen 1,3 und 1,4, ebenso zwischen 1,5 und 1,6 je eine Wurzel der gegebenen Gleichung liegt. Wir wollen eine von ihnen berechnen. Da nach den Werten von y die Wurzel ziemlich in der Mitte zwischen 1,3 und 1,4 liegen dürfte, so setzen wir

$$a = 1{,}35,^*)$$

also erhalten wir

$$h = -\frac{f(a)}{f'(a)} = \frac{0{,}016\ldots}{1{,}002} = 0{,}016\ldots$$

also als erste Annäherung der Wurzel 1,366. Die weitere Rechnung ergiebt zunächst für $a_1 = 1{,}366$

---

*) Die Rechnung zeigt, dass dies wirklich zur Wurzel führt; sicherer geht man so vor, dass man zunächst die Werte von $f(x)$ für $x = 1{,}35,\ 1{,}36,\ 1{,}37\ldots$ berechnet, bis man zum Zeichenwechsel gelangt.

$$h_1 = -\frac{f(a_1)}{f'(a_1)} = \frac{0{,}0039\ldots}{0{,}866\ldots} = 0{,}004\ldots,$$

demnach als zweite Annäherung $a_2 = 1{,}370$. Eine nochmalige Anwendung der Formel führt zu

$$h_2 = -\frac{f(a_2)}{f'(a_2)} = -\frac{0{,}000487}{0{,}832\ldots} = -0{,}00059,$$

was für die gesuchte Wurzel 1,36941 ergeben würde.

§ 4. Zahl der reellen Wurzeln einer Gleichung.

Die Gleichung 7), welche die Kurve darstellt, lässt erkennen, dass, wenn x sehr grosse positive oder negative Werte hat, y in beiden Fällen ebenfalls sehr gross und zwar positiv ist; bereits wenn wir $x = 10$ oder $x = -10$ setzen, so überwiegt das erste Glied x^4 alle übrigen Glieder, um so mehr also, wenn die für x zu setzende Zahl numerisch noch grösser ist als 10. Die Kurve liegt also für sehr grosse positive und sehr grosse negative Werte von x auf der positiven Seite der x-Axe. Schneidet sie die Axe und tritt demgemäss auf die negative Seite der x-Axe, so muss sie notwendig die Axe noch einmal schneiden, um wieder auf die positive Seite zu gelangen; d. h. die Gleichung hat entweder vier oder zwei oder keine reelle Wurzel, und das gleiche gilt augenscheinlich für jede Gleichung vierten Grades.

Umgekehrt ist es bei einer Gleichung dritten Grades. Wir haben bereits auf S. 247 hervorgehoben, dass die dort betrachtete Kurve

$$y = x^3 - 7x + 1$$

für sehr grosse positive Werte von x auf der positiven Seite der x-Axe verläuft, für sehr grosse negative dagegen auf der negativen Seite; denn das Glied x^3 überwiegt in diesem Fall die übrigen Glieder und ist negativ oder positiv, je nachdem x selbst negativ oder positiv ist. Die Kurve verläuft also zunächst auf der negativen, zuletzt auf der positiven Seite der x-Axe. Sie muss daher notwendig mindestens einmal die x-Axe kreuzen. Thut sie es mehr als einmal, so muss sie es auch zum dritten Mal thun, d. h. die betrachtete Gleichung hat entweder eine oder drei reelle Wurzeln. Dies gilt für jede Gleichung dritten Grades.

Allgemein sieht man, dass eine Gleichung ungeraden Grades notwendig eine und stets eine ungerade Zahl reeller Wurzeln hat; für eine Gleichung geraden Grades dagegen ist die Zahl der reellen Wurzeln stets gerade, und kann im besondern auch Null sein.

Eine Ausnahme hiervon tritt nur dann ein, wenn die x-Axe die bezügliche Kurve berührt. Dann fallen in den Berührungspunkt zwei sonst verschiedene Schnittpunkte der Axe mit der Kurve zusammen. Man sieht dies am einfachsten, wenn man in Fig. 60 (S. 246) die x-Axe parallel mit sich verschiebt, bis eine Berührung eintritt. Zählt man jetzt den Berührungspunkt als doppelten Schnittpunkt, so bleiben alsdann die obigen Sätze über die Zahl der Wurzeln bestehen.

§ 5. Transcendente Gleichungen.

Allgemeine Methoden für die Auflösung von Gleichungen, in denen Logarithmen, Sinus, Kosinus u. s. w. (sogen. transcendente Gleichungen) vorkommen, giebt es nicht; allein für den Naturforscher, der sich vor die Aufgabe einer rechnerischen Behandlung derartiger Gleichungen gestellt sieht, giebt es auch in solchen Fällen keine andere Schwierigkeit, als die, der nötigen Geduld sich zu befleissigen und einfach durch Probieren die Auflösung schliesslich zu erzwingen. Aus der Theorie der galvanischen Stromerzeugung*) ergiebt sich, um auch ein derartiges Beispiel kurz zu erläutern, für die Potentialdifferenz zwischen zwei Lösungen binärer Elektrolyte, deren Ionengeschwindigkeiten bezw. u_1, v_1 und u_2, v_2, und deren Konzentrationen c_1 und c_2 sind, der Ausdruck

$$F = 0{,}0576 \log x,$$

worin x aus der transcendenten Gleichung

$$1) \quad \frac{x c_2 u_2 - c_1 u_1}{c_2 v_2 - x v_1 c_1} = \frac{\log \frac{c_2}{c_1} - \log x}{\log \frac{c_2}{c_1} + \log x} \cdot \frac{x c_2 - c_1}{c_2 - x c_1}$$

zu berechnen ist.

Suchen wir z. B. die Potentialdifferenz zwischen einer 0,1-normalen Chlorkaliumlösung und einer 1-normalen Salzsäurelösung, so wird

$$u_1 = 52 \quad u_2 = 272 \quad c_1 = 0{,}1$$
$$v_1 = 54 \quad v_2 = 54 \quad c_2 = 1{,}0$$

und wir finden durch Auflösung von Gl. 1) nach $\log x$ und Einsetzen der Zahlenwerte

$$2) \quad \log x = -\frac{0{,}2 + 218\,x}{-10{,}6 + 326\,x} = A.$$

*) Nernst, Zeitschr. f. physik. Chem. **4.** 129. (1889); Planck, Wied. Ann. **40.** 561. (1890).

Durch Probieren finden wir

	x	$\log x$	A
I	0,1105	— 0,9566	— 0,9554
II	0,112	— 0,9508	— 0,9500
III	0,115	— 0,9393	— 0,9398
IV	0,120	— 0,9208	— 0,9243

Bei I und II ist

$$\log x < A$$

bei III und IV hingegen

$$\log x > A;$$

zwischen II und III liegt daher die gesuchte Wurzel. Da innerhalb der obigen kleinen Aenderungen von x sowohl diese Grösse, wie auch A sich nahe linear ändern, so findet man durch Mittelnehmen zwischen II und III sofort ein neues Paar zusammengehöriger Werte von $\log x$ und A, welche die gesuchte Wurzel noch mehr einengen; in dieser Weise fortfahrend ergiebt sich alsbald

$$\log x = A = -0{,}9436,$$
$$x = 0{,}1139.$$

In fast allen vorkommenden Fällen wird das Probieren sehr erleichtert, dadurch, dass wir über den ungefähren Wert der gesuchten Grösse von vornherein durch die Natur des betreffenden Problems mehr oder weniger genau orientiert sind. — Uebrigens ist darauf zu achten, dass man sich nicht durch Wurzeln irreführen lässt, die erst durch algebraische Umformungen solcher Gleichungen hineingebracht werden. So ist in Gl. 2) auch $x = 0{,}1$ eine Wurzel, weil für diesen Wert sowohl A wie $\log x = -1$ werden; diese Wurzel stimmt jedoch nicht mehr für die Ausgangsgleichung 1), sondern ist erst dadurch entstanden, dass wir beide Seiten von 1) mit $\log \frac{c_2}{c_1} + \log x$ multiplizierten, wodurch

$$x = \frac{c_1}{c_2}$$

zu einer Wurzel gemacht wird, die keine physikalische Bedeutung besitzt.

Elftes Kapitel.

Differentiation und Integration empirisch festgestellter Funktionen.

§ 1. Differentiation.

Wenn der Experimentator die Beziehungen zwischen zwei veränderlichen Grössen durch direkte Beobachtung ermittelt, so stellt er die Ergebnisse seiner Messungen zunächst in einer Tabelle zusammen. Je nach Bedürfnis sucht er dann entweder nach einem mathematischen Ausdruck (Interpolationsformel), der mit möglichst guter Annäherung an die Ergebnisse des Experiments aus der einen Grösse die andere zu berechnen gestattet, oder aber er führt durch graphische Darstellung die erhaltene Beziehung anschaulich vor Augen.

In vielen Fällen ist nun der Differentialquotient der einen Grösse nach der andern von theoretischer Wichtigkeit; seine direkte Bestimmung ist natürlich ausgeschlossen, weil die Messungen zu ungenau würden, falls man die eine Grösse experimentell um unendlich wenig ändern und den Effekt hievon auf die andere messend bestimmen wollte. Ist man jedoch im Besitze einer hinreichend leistungsfähigen Interpolationsformel, so führt natürlich unmittelbar die Differentiation derselben zum gewünschten Endresultat*); verfügt man andererseits über eine genaue graphische Darstellung, so liefert die Tangente, die man an die Kurve im gewünschten Punkte legt, nach S. 57 den Differentialquotienten.**)

---

*) So stellte Horstmann, um $\frac{dp}{dt}$ zu ermitteln, die Dissociationsspannung p des festen Salmiaks in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur t durch die Interpolationsformel

$$\log p = a + b A^t$$

dar, worin a, b, A aus den Spannungstabellen zu ermittelnde Konstanten sind. Vgl. Ber. deutsch. chem. Ges. **2**. 137 (1869).

) So verfuhr Horstmann, um den in vorstehender Anmerkung erwähnten Differentialquotienten auf einem zweiten Wege zu finden. Lieb. Ann. Erg. **8. 125 (1871—72).

Beide Methoden haben ihre Mängel; die erste setzt den Besitz einer guten Interpolationsformel voraus, die bisweilen überhaupt nicht und sonst fast immer nur durch mühsame Rechnungen zu erhalten ist; die zweite setzt zur exakten Durchführung ein ungewöhnliches Geschick im Zeichnen voraus.

Von hoher naturwissenschaftlicher Bedeutung ist daher eine Methode, die zur direkten Ermittelung des Differentialquotienten aus einer Tabelle führt und im folgenden auseinandergesetzt wird.

Es sei $f(x)$ die bezügliche Funktion; wir nehmen an, dass man ihre Werte für solche Werte der Variabeln kennt, die um dieselbe Grösse h von einander verschieden sind, d. h. für

$$1) \quad x,\ x \pm h,\ x \pm 2h,\ x \pm 3h \ldots\ldots$$

Eine solche Aufgabe liegt z. B. vor, wenn man den Dampfdruck p einer Flüssigkeit für Temperaturen ϑ kennt, die um gleich viele Grade (z. B. um je 1 Grad) von einander verschieden sind, und daraus den Differentialquotienten $\frac{dp}{d\vartheta}$ für den Druck $p = p_0$ bestimmen soll.

Wir setzen die bezügliche Formel zunächst hierher und lassen den Beweis weiter unten folgen. Sie lautet:

$$2) \quad \frac{dp}{d\vartheta} = \frac{1}{h}\left\{\frac{\Delta_0 + \Delta_{-1}}{2} - \frac{1}{6}\frac{\Delta''_{-1} + \Delta''_{-2}}{2} - \frac{1}{30}\frac{\Delta''''_{-2} + \Delta''''_{-3}}{2} \ldots\right\}$$

und zwar haben darin die Grössen Δ_0, Δ_{-1}, Δ''_{-1} .... folgende Bedeutung.

Setzen wir

$$p_0 = f(\vartheta), \quad p_1 = f(\vartheta + h), \quad p_2 = f(\vartheta + 2h) \ldots.$$
$$p_{-1} = f(\vartheta - h), \quad p_{-2} = f(\vartheta - 2h), \ldots.$$

so ist

$$p_1 - p_0 = \Delta_0, \quad p_0 - p_{-1} = \Delta_{-1}$$
$$p_2 - p_1 = \Delta_1, \quad p_{-1} - p_{-2} = \Delta_{-2} \quad \text{u. s. w.;}$$

die Werte

$$\Delta_2,\ \Delta_1,\ \Delta_0,\ \Delta_{-1},\ \Delta_{-2} \ldots.$$

stellen also der Reihe nach die Differenzen je zweier auf einander folgender Druckwerte dar (erste Differenzenreihe). Ferner ist

$$\Delta_1 - \Delta_0 = \Delta'_0, \quad \Delta_0 - \Delta_{-1} = \Delta'_{-1}$$
$$\Delta_2 - \Delta_1 = \Delta'_1 \quad \Delta_{-1} - \Delta_{-2} = \Delta'_{-2}$$
$$\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.,}$$

d. h. die Reihe

$$\Delta'_1,\ \Delta'_0,\ \Delta'_{-1},\ \Delta'_{-2} \ldots.$$

stellt die Differenzen je zweier auf einander folgender Zahlen der ersten Differenzenreihe dar (zweite Differenzenreihe). Ebenso bedeuten

$$\Delta''_1,\ \Delta''_0,\ \Delta''_{-1},\ \Delta''_{-2} \ldots.$$

die Differenzen je zweier Zahlen der zweiten Differenzenreihe (dritte Differenzenreihe) u. s. w. u. s. w. Immer ist die Bezeichnung so gewählt, dass der Index des neuen Δ mit dem Index des bezüglichen Subtrahenden übereinstimmt. Es bedeuten daher Δ_0 und Δ_{-1} zwei konsekutive Differenzen der ersten Differenzenreihe, Δ''_{-1} und Δ''_{-2} die zwei anschliessenden konsekutiven Zahlen der dritten Differenzenreihe u. s. w.

Beispiel. Aus den von Wiebe*) neuerdings mitgeteilten Werten für den Dampfdruck p des Wassers bei der Temperatur ϑ soll für 100^0 der Wert von $\frac{dp}{d\vartheta}$ berechnet werden. Wir finden von 0,5 zu $0{,}5^0$ in den Tabellen folgende Werte für ϑ und p:

ϑ	p	Δ	Δ'	Δ''
99,0	$(733{,}24)_{-2}$			
		$(13{,}28)_{-2}$		
99,5	$(746{,}52)_{-1}$		$(0{,}20)_{-2}$	
		$(13{,}48)_{-1}$		$(+0{,}01)_{-2}$
100,0	$(760{,}00)_0$		$(0{,}21)_{-1}$	
		$(13{,}69)_0$		$(-0{,}01)_{-1}$
100,5	$(773{,}69)_{+1}$		$(0{,}20)_0$	
		$(13{,}89)_1$		
101,0	$(787{,}58)_{+2}$.			

In obiger Tabelle sind die Zahlenwerte mit den betreffenden Indices versehen; wir finden also aus 1)

$$\frac{dp}{d\vartheta} = \frac{1}{0{,}5}\left\{\frac{13{,}48+13{,}69}{2} - \frac{1}{6}\frac{0{,}01-0{,}01}{2}\right\} = 27{,}17\,\frac{mm}{\text{Celsiusgrade.}}$$

Die Werte von Δ'''' zu berücksichtigen, wird höchst selten erforderlich sein.

Wir knüpfen den Beweis zweckmässig direkt an das eben genannte Beispiel an. Wir nehmen also an, es sei

$$3)\quad p = f(\vartheta) = A + B\vartheta + C\vartheta^2 + D\vartheta^3 + E\vartheta^4 \ldots$$

die Reihe, durch die sich der Druck p als Funktion von ϑ darstellen lasse. Aus ihr folgt durch Differentiation

$$4)\quad \frac{dp}{d\vartheta} = f'(\vartheta) = B + 2C\vartheta + 3D\vartheta^2 + 4E\vartheta^3 + \cdots$$

und es ist nun die Aufgabe, die Koeffizienten der rechts stehenden Reihe durch das Zahlenmaterial der Tabelle auszudrücken. Dieses Zahlenmaterial enthält die Werte von p für die Temperaturen

$$\vartheta,\ \vartheta \pm h,\ \vartheta \pm 2h.$$

Setzen wir in Gl. 3) für ϑ $\vartheta + h$ und $\vartheta - h$, so ergeben sich folgende Gleichungen:

*) Tafeln über die Spannkraft des Wasserdampfes. Braunschweig 1894.

5) $$\begin{aligned} p_1 &= f(\vartheta+h) = A+B(\vartheta+h)+C(\vartheta+h)^2+D(\vartheta+h)^3+E(\vartheta+h)^4 \\ p_{-1} &= f(\vartheta-h) = A+B(\vartheta-h)+C(\vartheta-h)^2+D(\vartheta-h)^3+E(\vartheta-h)^4 \end{aligned}$$

Aus ihnen und Gleichung 2) folgt durch Subtraktion nach einfachen Reduktionen*)

$$\begin{aligned} p_1-p_0 &= Bh+C(2\vartheta h+h^2)+D(3\vartheta^2 h+3\vartheta h^2+h^3)+E \\ &\quad (4\vartheta^3 h+6\vartheta^2 h^2+4\vartheta h^3+h^4)+\cdots \\ p_0-p_{-1} &= Bh+C(2\vartheta h-h^2)+D(3\vartheta^2 h-3\vartheta h^2+h^3)+E \\ &\quad (4\vartheta^3 h-6\vartheta^2 h^2+4\vartheta h^3-h^4)+\cdots \end{aligned}$$

Addieren wir diese Gleichungen und beachten, dass oben

$$p_1-p_0=\Delta_0, \quad p_0-p_{-1}=\Delta_{-1}$$

gesetzt wurde, so folgt

$$\Delta_0+\Delta_{-1}=2Bh+2C.2\vartheta h+2D.(3\vartheta^2 h+h^3)+2E.(4\vartheta^3 h+4\vartheta h^3)+\cdots$$

und wenn wir noch durch $2h$ dividieren,

$$\frac{1}{h}\cdot\frac{\Delta_0+\Delta_{-1}}{2}=B+2C\vartheta+3D\vartheta^2 h+4E\vartheta^3+\cdots \\ +Dh^2+4E\vartheta h^2+\cdots\cdots$$

Der erste Teil der linken Seite ist aber der Differentialquotient von p, also folgt schliesslich

6) $$\frac{dp}{d\vartheta}=\frac{1}{h}\left(\frac{\Delta_0+\Delta_{-1}}{2}\right)-(Dh^2+4E\vartheta h^2+\cdots).$$

Ist h sehr klein und kann man die mit h^2 multiplizierten Glieder vernachlässigen, so erhält man in erster Annäherung

7) $$\frac{dp}{d\vartheta}=\frac{1}{h}\frac{\Delta+\Delta_{-1}}{2}.$$

Zu einer genaueren Formel gelangt man, wenn man auch die rechts in der Klammer stehende Reihe durch das Zahlenmaterial der Tabelle ersetzt. Hier verfahren wir so.

Wir setzen in Gl. 2) für ϑ $\vartheta+2h$, resp. $\vartheta-2h$, und erhalten

$$\begin{aligned} p_2 &= A+B(\vartheta+2h)+C(\vartheta+2h)^2+D(\vartheta+2h)^3+E(\vartheta+2h)^4+\cdots \\ p_{-2} &= A+B(\vartheta-2h)+C(\vartheta-2h)^2+D(\vartheta-2h)^3+E(\vartheta-2h)^4+\cdots \end{aligned}$$

Aus ihnen und den Gleichungen 4) folgt durch Subtraktion und einfache Reduktionen, wenn wir beachten, dass

$$p_2-p_1=\Delta_1, \quad p_{-1}-p_{-2}=\Delta_{-2}$$

gesetzt wurde,

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= Bh+C(2\vartheta h+3h^2)+D(3\vartheta^2 h+9\vartheta h^2+7h^3)+E \\ &\quad (4\vartheta^3 h+18\vartheta^2 h^2+28\vartheta h^3+15h^4)+\cdots \\ \Delta_{-2} &= Bh+C(2\vartheta h-3h^2)+D(3\vartheta^2 h-9\vartheta h^2+7h^3)+E \\ &\quad (4\vartheta^3 h-18\vartheta^2 h^2+28\vartheta h^3-15h^4)+\cdots \end{aligned}$$

*) Vgl. Formel 2 ff. des Anhangs.

Hierzu fügen wir die bereits oben abgeleiteten Gleichungen

$$\Delta_0 = Bh + C(2\vartheta h + h^2) + D(3\vartheta^2 h + 3\vartheta h^2 + h^3) + E(4\vartheta^3 h + 6\vartheta^2 h^2 + 4\vartheta h^3 + h^4) + \cdots$$

$$\Delta_{-1} = Bh + C(2\vartheta h - h^2) + D(3\vartheta^3 h - 3\vartheta h^2 + h^3) + E(4\vartheta^3 h - 6\vartheta^2 h^2 + 4\vartheta h^3 - h^4) + \cdots$$

Diese Gleichungen subtrahieren wir jetzt nochmals von einander, und erhalten mit Rücksicht auf die obigen Bezeichnungen

$$\Delta' = C.2h^2 + D(6\vartheta h^2 + 6h^3) + E(12\vartheta^2 h^2 + 24\vartheta h^3 + 14h^4) + \cdots$$

$$\Delta'_{-1} = C.2h^2 + D(6\vartheta h^2) + E(12\vartheta^2 h^2 + 2h^4) + \cdots$$

$$\Delta'_{-2} = C.2h^2 + D(6\vartheta h^2 - 6h^3) + E(12\vartheta^2 h^2 - 24\vartheta h^3 + 14h^4) + \cdots$$

Endlich folgt hieraus durch nochmalige Subtraktion für die neuen Differenzen $\Delta''_{-1} = \Delta' - \Delta'_{-1}$ und $\Delta''_{-2} = \Delta'_{-1} - \Delta'_{-2}$ der Wert

$$\Delta''_{-1} = D.6h^3 + E(24\vartheta h^3 + 12h^4) + \cdots$$

$$\Delta''_{-2} = D.6h^3 + E(24\vartheta h^3 - 12h^4) + \cdots$$

Hieraus ergiebt sich nunmehr durch Addition

$$\Delta''_{-1} + \Delta''_{-2} = 2D.6h^3 + 2E.24\vartheta h^3 + \cdots$$

oder endlich, wenn wir durch $2h$ dividieren,

$$\frac{1}{h}\cdot\frac{\Delta''_{-1} + \Delta''_{-2}}{2} = 6Dh^2 + 24E\vartheta h^2 + \cdots$$

$$= 6(Dh^2 + 4\vartheta h^2 + \cdots) + \cdots$$

Der Ausdruck in der Klammer rechts ist aber gerade derjenige, dessen Wert wir suchten. Vernachlässigen wir die übrigen Glieder rechts, setzen also für die Klammer den so gefundenen Annäherungswert*) in Gl. 6) ein, so erhalten wir

$$8)\quad \frac{dp}{d\vartheta} = \frac{1}{h}\left\{\frac{\Delta_0 + \Delta_{-1}}{2} - \frac{1}{6}\frac{\Delta''_{-1} + \Delta''_{-2}}{2}\right\}$$

als besseren Annäherungswert des gesuchten Differentialquotienten.

Eine noch genauere Formel ist die bereits oben erwähnte

$$\frac{dp}{d\vartheta} = \frac{1}{h}\left\{\frac{\Delta_0 + \Delta_{-1}}{2} - \frac{1}{6}\frac{\Delta''_{-1} + \Delta''_{-2}}{2} - \frac{1}{30}\frac{\Delta''''_{-2} + \Delta''''_{-3}}{2}\right\},$$

wo Δ''''_{-2} und Δ''''_{-3} ganz analoge Bedeutung haben, wie die vorhergehenden Grössen.

---

*) Auf der rechten Seite der letzten Gleichung erscheinen, wenn man auch $F\vartheta^5 + G\vartheta^6 + \ldots$ berücksichtigt, ausser den oben hingeschriebenen Gliedern noch andere, die mit h^4, $h^6 \ldots$ multipliziert sind. Daher ist der gefundene Wert nur ein Annäherungswert.

§ 2. Integration.

Bisweilen wünscht man das bestimmte Integral

$$\int_{x_0}^{x_n} y\,dx$$

aus einer Tabelle zu berechnen. Aehnlich wie oben integriert man entweder eine Interpolationsformel, die sich den Beobachtungen hinreichend anschliesst, oder aber man trägt sich die Kurve graphisch auf und bestimmt den Inhalt des Flächenstückes, der nach S. 151 den Wert des bestimmten Integrals darstellt. Letztere Bestimmung geschieht entweder mit Hilfe eines Planimeters oder aber durch Auswägen des ausgeschnittenen Flächenstücks, nachdem man das Gewicht der Flächeneinheit des (hinreichend gleichförmig vorausgesetzten) Papiers oder sonstigen Materials vorher bestimmt hat.

Liegen die Werte von

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n,$$

denen je die Funktionswerte

$$y_0,\ y_1,\ y_2\ \ldots\ y_n$$

entsprechen, hinreichend nahe aneinander, so ist der Wert des gesuchten Integrals $\mathcal{J}$ in einfachster Annäherung

$$1)\quad \mathcal{J}=(x_1-x_0)\frac{y_0+y_1}{2}+(x_2-x_1)\frac{y_1+y_2}{2}+\cdots+(x_n-x_{n-1})\frac{y_{n-1}+y_n}{2};$$

diese Formel liefert nämlich die Summe der Flächeninhalte der Trapeze*), die durch die Abscissenaxe, zwei benachbarte y-Koordinaten und durch die Verbindungslinie der Endpunkte dieser Koordinaten begrenzt werden und sie wird offenbar in allen Fällen brauchbare Werte liefern, in denen die Kurve

$$y=f(x)$$

sich den geraden Verbindungslinien der y-Koordinaten hinreichend nahe anschliesst.

Beispiel. Man habe die Stärke eines Stromes, der zur Abscheidung von Silber benutzt wird (z. B. im Silbervoltameter) bei den Zeiten $t_0,\ t_1,\ t_2,\ldots t_n$ gemessen und hierfür die Werte $I_0,\ I_1,\ I_2\ldots I_n$ beobachtet. Dann ist die Menge ausgefällten Silbers gleich dem Produkt aus dem Aequivalentgewicht des Silbers und der (elektrochemisch gemessenen) Elektrizitätsmenge, die den Stromkreis durchflossen hat. Letztere ist aber

*) Vgl. Formel 72 des Anhangs.

$$E = \int_{t_0}^{t_n} I\,dt$$

oder nach dem vorstehenden

$$E = (t_1 - t_0)\frac{I_0 + I_1}{2} + (t_2 - t_1)\frac{I_1 + I_2}{2} + \cdots + (t_n - t_{n-1})\frac{I_{n-1} + I_n}{2}.$$

Eine bessere Annäherung erhält man, wenn man durch die Endpunkte dreier benachbarter y-Koordinaten je eine Parabel legt. Um z. B. die Endpunkte von y_0, y_1, y_2 durch ein Parabelstück zu verbinden, müssten wir eine Kurve zeichnen*)

$$y = f(x) = y_0 + a(x - x_0) + b(x - x_0)^2,$$

worin die Konstanten a und b aus den Bedingungsgleichungen

$$2)\quad y_1 = y_0 + a(x_1 - x_0) + b(x_1 - x_0)^2,$$
$$3)\quad y_2 = y_0 + a(x_2 - x_0) + b(x_2 - x_0)^2$$

zu berechnen sind. Diese Gleichungen drücken nämlich aus, dass unsere Parabel durch die Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ geht; da Gl. 1) durch die Koordinaten x_0 und y_0 direkt befriedigt wird, so ist damit sichergestellt, dass die Parabel die drei betrachteten Punkte enthält.**) Aus Gl. 2) und 3) ergiebt sich

$$4)\quad a = \frac{(y_1 - y_0)(x_2 - x_0)^2 - (y_2 - y_0)(x_1 - x_0)^2}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$5)\quad b = \frac{(y_2 - y_0)(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

und es folgt für das Integral

$$6)\quad \int_{x_0}^{x_2} y\,dx = y_0(x_2 - x_0) + \frac{a}{2}(x_2 - x_0)^2 + \frac{b}{3}(x_2 - x_0)^3,$$

worin also die Zahlenwerte von a und b aus 4) und 5) zu berechnen sind. In derselben Weise behandelt man x_2, x_3, x_4, bez. y_2, y_3, y_4,

*) Dass diese Kurve eine Parabel ist, erkennt man daraus, dass ihre Gleichung durch Koordinatentransformation (S. 29 ff.) in die Gestalt $\eta = 2p\xi^2$ übergeführt werden kann. Dies erreicht man dadurch, dass man

$$x = \xi + \alpha,\quad y = \eta + \beta$$

setzt, und nun α und β dadurch bestimmt, dass in der neuen Gleichung das konstante Glied und der Faktor von ξ den Wert Null erhalten. Man sieht daraus noch, dass die ξ- und η-Axe bezüglich der x- und y-Axe parallel sind (S. 30), also der durch die Punkte 1, 2, 3 gelegte Parabelbogen einer Parabel angehört, deren Axe der y-Axe parallel ist.

**) Man kann zeigen, dass die Parabel, die durch die drei Punkte geht und die genannte Axenrichtung besitzt, eine ganz bestimmte ist.

y_5 u. s. w. Ist n gerade, so gelangt man schliesslich zu dem Werte für das Integral

$$\int_{x_{n-2}}^{x_n} y\,dx$$

und der Wert des gesuchten Integrals ist natürlich

$$\mathcal{J} = \int_{x_0}^{x_2} y\,dx + \int_{x_2}^{x_4} y\,dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} y\,dx.$$

Ist n eine ungerade Zahl, so berechnet man sich entweder durch Interpolation ein Paar neuer zusammengehöriger Werte von y und x oder aber man berechnet einfacher das zwischen zwei möglichst nahe gelegenen Werten von y liegende Flächenstück, wie oben als Trapez.

Sind die Abstände der y-Koordinaten sämtlich gleich gross, ist also

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots . x_n - x_{n-1} = h,$$

so vereinfacht sich vorstehende Gleichung durch eine einfache Rechnung zu

$$7)\quad \mathcal{J} = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + y(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})\right],$$

ein unter dem Namen Simpson'sche Formel bekannter Ausdruck; n ist natürlich wieder eine gerade Zahl. Man erspart sich also viel Rechnung, wenn man im obigen Beispiel (S. 261) die Stromintensitäten in gleichen Zeitintervallen (etwa jede Minute) abliest.

Zahlenbeispiel. Gegeben seien die Werte

$$\begin{aligned} x_0 &= 1{,}000 \quad & y_0 &= 0{,}5000 \\ x_1 &= 1{,}500 \quad & y_1 &= 0{,}3077 \\ x_2 &= 2{,}000 \quad & y_2 &= 0{,}2000 \end{aligned}$$

und es sei auszuwerten der Betrag

$$\mathcal{J} = \int_{x_0}^{x_2} y\,dx.$$

Hierfür liefert Formel 1)

$$\mathcal{J} = 0{,}5\,\frac{0{,}5000 + 0{,}3077}{2} + 0{,}5\,\frac{0{,}3077 + 0{,}2000}{2} = 0{,}32885.$$

Nehmen wir jedoch die genauere Formel 6) zu Hilfe, so ergiebt sich

$$y_0(x_2 - x_1) = +0{,}5000$$
$$\frac{a}{2}(x_2 - x_0)^2 = -0{,}2346$$
$$\frac{b}{3}(x_2 - x_0)^2 = +0{,}0564$$

somit $$\mathfrak{F} = 0{,}3218.$$

Da in unserem Beispiel

$$x_2 - x_1 = x_1 - x_0$$

ist, so können wir bequemer die vereinfachte Formel 7) anwenden und finden so

$$\mathfrak{F} = \frac{0{,}5}{3}\left[0{,}5000 + 4 \times 0{,}3077 + 0{,}2000\right] = 0{,}3218,$$

welcher Wert natürlich mit dem nach Gl. 6) erhaltenen absolut übereinstimmen muss.

Die Werte von y sind in obigem Zahlenbeispiel nach der Gleichung

$$y = f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

berechnet; der genaue numerische Wert des gesuchten Integrals ist also in diesem Falle direkt zu erhalten aus der Gleichung

$$\mathfrak{F} = \int_1^2 \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,tg} 2 - \operatorname{arc\,tg} 1 = 0{,}321751;$$

wir sehen also, dass die Formeln 6) bez. 7) einen sehr bemerkenswerten Grad von Genauigkeit besitzen.

Zwölftes Kapitel.

Beispiele aus der Mechanik und Thermodynamik.

§ 1. Ungedämpfte Schwingungen.

In Kap. VII (S. 168) haben wir gezeigt, dass, wenn ein Punkt um eine Ruhelage gleichmässige Schwingungen ausführt, die durch die Gleichung

$$1) \quad x = A \sin t$$

gegeben sind, er unter dem Einfluss einer anziehenden Kraft steht, als deren Sitz die Ruhelage anzusehen ist, und die der Entfernung des beweglichen Punktes von der Ruhelage gleich ist. Wir wollen jetzt das umgekehrte Problem behandeln. Wir nehmen also an, es bewege sich ein Punkt geradlinig unter dem Einfluss einer anziehenden Kraft, die von einem Zentrum O ausgeht, und dem Abstand des Punktes P von diesem Zentrum proportional ist; die Aufgabe ist, die Bewegung des Punktes zu bestimmen.

Nach den Prinzipien der Mechanik ist bekanntlich die Beschleunigung das Mass der Kraft; Kräfte, die auf dieselbe Masse wirken, verhalten sich wie die Beschleunigungen, die sie der Masse mitteilen, und wenn zwei Kräfte verschiedenen Massen die nämliche Beschleunigung erteilen, so stehen die Kräfte im direkten Verhältnis dieser Massen; daraus folgt allgemein, dass zwei Kräfte k und k_1, die den Massen m und m_1 die Beschleunigung ω resp. ω_1 erteilen, sich verhalten wie die Produkte aus Masse und Beschleunigung, d. h.

$$2) \quad k : k_1 = m\omega : m_1\omega_1.$$

Bezeichnet man jetzt als Krafteinheit diejenige Kraft, die der Masse $m_1 = 1$ in der Zeit 1 die Beschleunigung $\omega_1 = 1$ erteilt, so folgt aus obiger Gleichung $k : 1 = m\omega : 1$ oder

$$3) \quad k = m\omega.$$

Setzen wir hier gemäss den Entwicklungen von Kap. VII, § 3 (S. 167) für ω seinen Wert, so folgt schliesslich

$$4) \quad k = m\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Nun ist in dem hier vorliegenden Fall (Fig. 61) die Kraft der Entfernung des beweglichen Punktes vom Zentrum O proportional. Hat sie daher in der Entfernung 1 von O die Grösse e, so hat sie in der Entfernung $OP = s$ die Grösse es; da sie überdies als anziehende Kraft die Entfernung $OP = s$ zu verringern sucht, so ist sie negativ in Rechnung zu stellen, d. h. es besteht die Gleichung

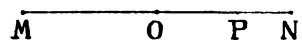


Fig. 61.

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -es,$$

wo e eine positive Zahl ist. Setzen wir noch

$$5) \quad \frac{e}{m} = \beta^2,$$

so finden wir schliesslich

$$6) \quad \frac{d^2s}{dt^2} = -\beta^2 s$$

als diejenige Gleichung — sie heisst eine Differentialgleichung — die das Bewegungsgesetz enthält und die Bewegung bestimmt.*) Wir haben nun eine Funktion s zu suchen, die dieser Gleichung genügt; man nennt sie eine Lösung oder ein Integral der Differentialgleichung.

Wegen $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ (S. 168) erhalten wir, wenn wir 6) mit $v = \frac{ds}{dt}$ multiplizieren,

$$v\frac{dv}{dt} = -\beta^2 s\frac{ds}{dt}$$

oder

$$7) \quad v\,dv = -\beta^2 s\,ds,$$

und hieraus folgt durch Integration $\int v\,dv = -\int \beta^2 s\,ds$ oder

$$8) \quad v^2 = \gamma^2 - \beta^2 s^2,$$

wo γ^2 die Integrationskonstante ist, die wir deshalb mit γ^2 bezeichnet haben, weil sie, wie die Gleichung $\gamma^2 = v^2 + \beta^2 s^2$ lehrt, eine positive Grösse bedeutet. Aus 8) folgt, wenn wir noch v durch den Differentialquotienten von s nach t ersetzen,

*) Befindet sich P links von O, so ist s eine negative Grösse und die rechte Seite von 6) positiv; jetzt hat aber auch die Kraft die Tendenz, den Wert der (negativen) Zahl s zu vergrössern und ist daher positiv.

$$9)\quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\gamma^2 - \beta^2 s^2};\quad dt = \frac{ds}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2 s^2}}.$$

Jetzt substituieren wir

$$\frac{\beta s}{\gamma} = u$$

und erhalten nach einfacher Umformung

$$dt = \frac{1}{\beta}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

und daraus durch Integration (S. 104)

$$10)\quad t - t_0 = \frac{1}{\beta}\arcsin u,$$

wo t_0 die Integrationskonstante ist. Daraus folgt weiter

$$u = \sin\beta(t - t_0)$$

oder, wenn wir für u seinen Wert setzen,

$$11)\quad s = \frac{\gamma}{\beta}\sin\beta(t - t_0).$$

Setzen wir schliesslich noch

$$12)\quad \frac{\gamma}{\beta} = A,$$

und zählen den Zeitpunkt Null von einem Augenblick an, in dem $s = 0$ ist, also der bewegliche Punkt durch O geht, so folgt $t_0 = 0$ und

$$13)\quad s = A\sin\beta t$$

als die gesuchte Gleichung in einfachster Form.

Auf die nämliche Weise wie auf S. 169 erkennt man, dass die Bewegung eine Schwingungsbewegung ist; A giebt die grösste Entfernung des schwingenden Punktes und heisst die Amplitude der Schwingung; der Punkt erreicht sie zur Zeit

$$\beta t = \frac{\pi}{2}.$$

Der hieraus sich ergebende Wert von t bedeutet die halbe Dauer einer einfachen Schwingung; bezeichnen wir diese Schwingungsdauer durch τ, so stellt also

$$14)\quad \tau = \frac{\pi}{\beta}$$

die Dauer einer einfachen Schwingung dar.

Aus Gleichung 12) folgt, dass die Amplitude A, da γ eine Integrationskonstante ist, alle möglichen Werte annehmen kann; für jede beliebige Amplitude werden also die Schwingungen durch 13)

dargestellt, wenn die Kraft in der Entfernung 1 den Wert $m\beta^2$ hat (Gl. 5), für die Masse 1 also den Wert β^2.

Die Voraussetzung über das Kraftgesetz, von dem wir ausgegangen sind, trifft bekanntlich für Pendelschwingungen mit kleiner Amplitude in guter Annäherung zu. Dieselben Gleichungen gelten für ungedämpft schwingende Magnetnadeln bei kleiner Amplitude; es ist nämlich die Kraft, welche die Magnetnadel zur Ruhelage (Nord-Südstellung) zurückzuführen sucht, dem Sinus des Ablenkungswinkels φ proportional, d. h. es besteht die Gleichung

$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D\sin\varphi,$$

worin K das Trägheitsmoment und D die Direktionskraft bedeutet. Ist nun φ ein kleiner Winkel, so kann man in erster Annäherung nach S. 201 $\sin\varphi$ durch φ ersetzen*), so dass sich ergiebt

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{K}\varphi.$$

Die Grösse β^2 in Gleichung 6) hat hier somit den Wert

$$\beta^2 = \frac{D}{K},$$

und es folgt aus Gleichung 14)

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{K}{D}}$$

oder

$$\frac{K}{D} = \frac{\tau^2}{\pi^2},$$

eine in der Galvanometrie vielgebrauchte Gleichung.

§ 2. Gedämpfte Schwingungen.

Wir dehnen die vorstehenden Betrachtungen noch dahin aus, dass wir den Widerstand in Rechnung ziehen, den die Bewegung durch das Mittel, in dem sie vor sich geht, erleidet. Dieser Widerstand kann erfahrungsgemäss der Geschwindigkeit der Bewegung proportional gesetzt werden. Hat er für die Geschwindigkeit 1 den

*) Das erste vernachlässigte Glied ist $\frac{\varphi^3}{3}$ (S. 201). Hat nun φ den Wert 0,1, was einem Winkel von ungefähr 6° entspricht (etwa dem Maximalwinkel, den man mit Fernrohr und Skala noch beobachtet), so beträgt die Vernachlässigung nur den dritten Teil von einem Tausendstel. (Vgl. auch S. 225.)

Wert a, so hat er für die Geschwindigkeit v den Wert av. Dieser Widerstand wirkt der Bewegung entgegen und ist daher durch $-av$ darzustellen, wenn a eine positive Zahl ist.*) Wir erhalten daher insgesamt

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -es - a\frac{ds}{dt},$$

oder indem wir durch m dividieren und

$$\frac{e}{m} = \beta^2, \quad \frac{a}{m} = 2\alpha$$

setzen,

$$1) \quad \frac{d^2s}{dt^2} = -\beta^2 s - 2\alpha\frac{ds}{dt}.$$

Dies ist die zu integrierende Differentialgleichung.

Um die Integration auszuführen, bedürfen wir einiger mathematischer Vorbereitungen.

Wir setzen zur Abkürzung $\sqrt{-1} = i$, so ist, wie sich leicht ergiebt**)

$$i^2 = -1, \; i^3 = -i, \; i^4 = 1, \; i^5 = i, \; i^6 = -1, \; i^7 = -i$$

u. s. w. Mit Rücksicht hierauf ergiebt sich (S. 202)

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{ix^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{ix^5}{1.2.3.4.5} \cdots$$

$$= (1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \cdots) + i(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} \cdots)$$

oder (S. 202)

$$2) \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Ebenso folgt aus

$$e^{-ix} = 1 - \frac{ix}{1} - \frac{x^2}{1.2} + \frac{ix^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{ix^5}{1.2.3.4.5} \cdots$$

$$= (1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots) - i(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} \cdots)$$

*) Genauer ergiebt sich folgendes. Befindet sich (vgl. Fig. 61 auf S. 266) der bewegliche Punkt in P in der Richtung von O nach N, so ist v positiv und $-av$ negativ, wie nötig, da der Widerstand jetzt eine Kraft repräsentiert, die die positiv gerichtete Bewegung verlangsamt. Befindet sich der Punkt in P, indem er auf dem Wege von N nach O ist, so ist v negativ, also $-av$ positiv gerichtet, was ebenfalls sein muss, da jetzt der Widerstand der negativ gerichteten Bewegung entgegensteht und daher eine positiv gerichtete Kraft abgiebt. Analog ist es für Lagen links von O.

**) Für die genauere Begründung des Rechnens mit der Grösse i (mit imaginären Grössen) müssen wir auf die in der Vorrede genannten Lehrbücher verweisen.

$$3)\quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Aus Gl. 2) und 3) folgt noch durch Addition und Subtraktion

$$4)\quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

zwei Formeln, die in der höheren Mathematik eine sehr ausgedehnte Anwendung finden.

Ein zweiter Hilfsatz, dessen wir bedürfen, ist folgender. Sind u und v Integrale der Differentialgleichung 1), so ist auch $w = Au + Bv$ ein Integral.

In der That, ist u und v je ein Integral von 1), so ist

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\beta^2 u - 2\alpha \frac{du}{dt}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -\beta^2 v - 2\alpha \frac{dv}{dt}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen mit A resp. B und addieren sie dann, so folgt

$$\frac{d^2(Au+Bv)}{dt^2} = -\beta^2(Au+Bv) - 2\alpha \frac{d(Au+Bv)}{dt}$$

d. h. es besteht wirklich die Gleichung

$$\frac{d^2w}{dt^2} = -\beta^2 w - 2\alpha \frac{dw}{dt},$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

Nunmehr gehen wir zur Lösung der Differentialgleichung über. Hierzu führt folgende Ueberlegung. Wir fanden im vorstehenden $A \sin \beta t$ als Lösung der Differentialgleichung, in der $\alpha = 0$ ist, ebenso ist aber auch $A \cos \beta t$ ein Integral dieser Differentialgleichung; um es zu erhalten, brauchten wir nur in Gleichung 11) des vorigen Paragraphen, welche die beliebige Integrationskonstante t_0 enthält, $-\beta t_0 = \frac{\pi}{2}$ zu setzen.

Der oben erwiesene, nahe Zusammenhang von $\sin x$ und $\cos x$ mit der Exponentialfunktion e^x legt es nun nahe, zu versuchen, ob vielleicht auch $Ae^{\lambda t}$ eine Lösung der Differentialgleichung ist, d. h. ob es möglich ist, eine Zahl λ dementsprechend zu bestimmen. Wir setzen also

$$5)\quad s = Ae^{\lambda t}$$

und nehmen an, diese Funktion sei ein Integral von 1). Es ist

$$\frac{ds}{dt} = A\lambda e^{\lambda t}, \quad \frac{d^2s}{dt^2} = A\lambda^2 e^{\lambda t}$$

und wenn wir dies in 1) einsetzen, ergiebt sich

$$\lambda^2 A e^{\lambda t} = A e^{\lambda t}\{-\beta^2 - 2\alpha\lambda\}.$$

Soll diese Gleichung richtig sein, so muss sie es auch bleiben, wenn wir durch $Ae^{\lambda t}$ dividieren, d. h. es muss

$$6) \quad \lambda^2 = -\beta^2 - 2\alpha\lambda$$

sein. Diese quadratische Gleichung in λ stellt die Bedingung dar, dass 5) eine Lösung unseres Problems giebt. Es giebt nun zwei Werte λ, die dieser Gleichung genügen, nämlich

$$7) \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \\ \lambda_2 &= -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \end{aligned}$$

und es sind

$$8) \quad s = Ae^{\lambda_1 t}, \text{ sowie } s = \dot{A}e^{\lambda_2 t}$$

Lösungen unserer Differentialgleichung.

Wir haben nun zu unterscheiden, ob

$$\alpha^2 - \beta^2 > 0 \text{ oder } \alpha^2 - \beta^2 < 0.$$

Im ersten Fall sei $\alpha^2 - \beta^2 = \gamma^2$, so wird

$$\lambda_1 = -\alpha + \gamma, \ \lambda_2 = -\alpha - \gamma$$

und die durch 8) dargestellten Bewegungen haben nicht mehr den Charakter der eigentlichen Schwingungsbewegung, sie erreichen beide den Punkt O nicht in endlicher Zeit, da e^x nur für $x = -\infty$ den Wert Null hat.

Auf diese Bewegung wollen wir nicht weiter eingehen.*) Wenn jedoch $\alpha^2 - \beta^2 < 0$ ist, so sei

$$9) \quad \alpha^2 - \beta^2 = -\delta^2, \ \beta^2 - \alpha^2 = \delta^2,$$

alsdann wird

$$10) \quad \lambda_1 = -\alpha + i\delta, \ \lambda_2 = -\alpha - i\delta$$

und wir finden daher als eine Lösung

$$s_1 = Ae^{\lambda_1 t} = Ae^{-\alpha t} \cdot e^{i\delta t}$$

oder gemäss Gl. 2)

$$11) \quad s_1 = Ae^{-\alpha t}(\cos\delta t + i \sin\delta t).$$

Eine zweite Lösung ist

$$s_2 = Ae^{\lambda_2 t} = Ae^{-\alpha t} e^{-i\delta t}$$

oder nach Gl. 3)

$$12) \quad s_2 = Ae^{-\alpha t}(\cos\delta t - i \sin\delta t).$$

Nun ist aber nach dem obigen Hilfssatz auch $\frac{s_1 + s_2}{2}$ ein Integral;

*) Eine derartige Bewegung heisst »aperiodische Schwingung«.

bezeichnen wir es durch s, so erhalten wir

$$13) \quad s = Ae^{-\alpha t}\cos\delta t.$$

Ebenso ist aber auch $\frac{s_1 - s_2}{2i}$ ein Integral; d. h.

$$14) \quad s = Ae^{-\alpha t}\sin\delta t$$

ist ebenfalls eine Funktion, die eine unsern Bedingungen entsprechende Bewegung liefert.

Die so erhaltenen Ausdrücke für s stellen den Verlauf der gedämpften Schwingungen dar; sie unterscheiden sich nur darin, wann wir den Zeitpunkt $t=0$ annehmen. Für Gl. 14) befindet sich, wie im vorigen Paragraphen, der bewegliche Punkt zur Zeit $t=0$ im Centrum O; dagegen liefert 13) für $t=0$ den Wert $s=A$, die Zeit wird also von dem Augenblick an gezählt, in dem sich der Punkt in seiner grössten Entfernung von O befindet. Wir legen für das folgende Gl. 14) zu Grunde.

Unter der Dauer einer einfachen Schwingung verstehen wir die Zeit, die während eines einfachen Hin- und Hergangs vom Zentrum O (der Ruhelage) aus vergeht. Nach Gl. 14) ist $s=0$, wenn $\sin\delta t=0$ ist, also das erste Mal für $t=0$, das zweite Mal für

$$\delta t = \pi.$$

Die so bestimmte Zeit ist die Schwingungsdauer. Bezeichnen wir sie durch T, so folgt

$$15) \quad T = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\pi}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}.$$

Die Schwingungsdauer bleibt also auch für gedämpfte Schwingungen konstant. Bezeichnen wir, wie auf S. 268, mit τ die Schwingungsdauer der ungedämpften Bewegung, so ist

$$\tau = \frac{\pi}{\beta}.$$

Hieraus folgt als Beziehung zwischen T und τ

$$\frac{T^2}{\tau^2} = \frac{\beta^2}{\delta^2}.$$

Ersetzen wir noch β^2 durch $\alpha^2 + \delta^2$ (Gl. 9), so giebt die Gleichung

$$16) \quad \frac{T^2}{\tau^2} = \frac{\alpha^2 + \delta^2}{\delta^2} = 1 + \frac{\alpha^2}{\delta^2}$$

eine andere Form der Beziehung zwischen der Schwingungsdauer der gedämpften und der ungedämpften Bewegung.

Die Amplituden der Schwingung nehmen mit der Zeit ab. Die Amplituden entsprechen denjenigen Werten von t, für die s ein Maximum

erreicht. Um sie zu ermitteln, haben wir den Differentialquotienten von s nach t gleich Null zu setzen (S. 228). Nun ist

$$17)\quad \frac{ds}{dt} = A\left[e^{-\alpha t}\delta\cos\delta t - e^{-\alpha t}\alpha\sin\delta t\right];$$

die Gleichung, welche die Maxima bestimmt, ist also

$$\delta\cos\delta t - \alpha\sin\delta t = 0$$

oder

$$18)\quad \operatorname{tg}\delta t = \frac{\delta}{\alpha};\quad \delta t = \operatorname{arc\,tg}\frac{\delta}{\alpha}.$$

Bezeichnen wir den so gefundenen Wert von t zur Abkürzung durch t_1, so giebt die Gl. 14), wenn wir noch die Amplitude durch l_1 bezeichnen,

$$19)\quad l_1 = Ae^{-\alpha t_1}\sin\delta t_1.$$

Diese Gleichung giebt also die Grösse des ersten Ausschlags.

Da jeder Ausschlag ein Maximum oder Minimum von s bedeutet (ein Minimum, wenn der Ausschlag in entgegengesetzter Richtung erfolgt), so müssen unendlich viele Werte von t existieren, die der Gl. 18) genügen. Wir erhalten sie, wenn wir beachten, dass es unendlich viele Bogen giebt, deren Tangente einen gegebenen Wert hat, d. h. die einer Gleichung von der Form

$$\operatorname{tg}\varphi = a$$

genügen. Da nämlich die Gleichung besteht

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \operatorname{tg}(\varphi+\pi) = \operatorname{tg}(\varphi+2\pi) = \ldots\ldots,$$

so folgt sofort, dass alle Werte

$$\varphi,\quad \varphi+\pi,\quad \varphi+2\pi,\quad \varphi+3\pi\ldots$$

die Gleichung $\operatorname{tg}\varphi = a$ erfüllen.

Für den hier vorliegenden Fall ergiebt sich daraus, dass die Gl. 18) befriedigt wird, wenn δt irgend einen Wert aus der Reihe

$$\delta t_1,\quad \delta t_1+\pi,\quad \delta t_1+2\pi,\quad \delta t_1+3\pi\ldots.$$

erhält. Bezeichnen wir die zugehörigen Werte von t durch $t_1, t_2, t_3, t_4\ldots$, so ist demnach zu setzen

$$\delta t_2 = \delta t_1+\pi,\quad \delta t_3 = \delta t_1+2\pi\ldots\ldots$$

oder aber mit Rücksicht auf Gl. 15)

$$t_2 = t_1+T,\quad t_3 = t_1+2T\ldots\ldots$$

Um die zugehörigen Ausschläge zu erhalten, haben wir diese Werte in 14) einzusetzen. Bezeichnen wir sie durch

$$l_1,\quad l_2,\quad l_3\ldots\ldots,$$

so folgt

$$\begin{aligned} l_1 &= Ae^{-\alpha t_1} \sin \delta t_1 \\ 20) \quad l_2 &= Ae^{-\alpha t_2} \sin \delta t_2. \\ l_3 &= Ae^{-\alpha t_3} \sin \delta t_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\sin(\delta t_2) = \sin(\delta t_1 + \pi) = -\sin(\delta t_1) \ldots,$$

wo das negative Zeichen dem Umstand entspricht, dass der zweite Ausschlag nach der negativen Seite liegt. Sehen wir daher vom Vorzeichen ab und berücksichtigen nur die absoluten Längen, so folgt

$$l_1 : l_2 = e^{-\alpha(t_1 - t_2)} = e^{\alpha T}.$$

Ebenso erhält man

$$21) \quad l_2 : l_3 = l_3 : l_4 \ldots = e^{\alpha T}.$$

Die Ausschläge nehmen also in konstantem Verhältnis ab. Man bezeichnet diesen konstanten Quotienten durch k und nennt ihn das Dämpfungsverhältnis. Sein Logarithmus heisst das logarithmische Dekrement; es findet sich

$$22) \quad \Lambda = \ln k = \alpha T = \frac{\alpha \pi}{\delta}.$$

Mittelst dieser Grösse Λ können wir Gl. 16) noch in die Form setzen

$$23) \quad \frac{T^2}{\tau^2} = 1 + \frac{\Lambda^2}{\pi^2}.$$

Im Fall der gedämpft schwingenden Magnetnadel ist

$$24) \quad \beta^2 = \frac{D}{K}$$

(S. 268) und

$$25) \quad 2\alpha = \frac{p}{K},$$

worin p die Dämpfungskonstante bedeutet.*) Es ergiebt sich daher aus 22) und 23)

$$26) \quad \frac{p}{K} = 2\frac{\Lambda}{T}, \quad \frac{K}{D} = \frac{\tau^2}{\pi^2} = \frac{T^2}{\pi^2 + \Lambda^2}.$$

Eine letzte für die Anwendungen wichtige Relation ist folgende. Es sei wieder τ die Schwingungsdauer der ungedämpften Schwingung, welche die Schwingung mit derselben Geschwindigkeit v_0 beginnt, wie die gedämpfte. Ihre Gleichung ist (S. 267)

$$s = A' \sin(\beta t),$$

*) Näheres vgl. Kohlrausch, Prakt. Physik. VII. Aufl. S. 326.

wo A' zunächst noch unbekannt ist. Für ihre Geschwindigkeit folgt daher

$$v = \frac{ds}{dt} = A'\beta\cos(\beta t),$$

und da zur Zeit $t=0$ $v=v_0$ sein soll, so wird

$$v_0 = A'\beta.$$

Andrerseits erhalten wir den Wert v_0 aus Gl. 17) in der Form

$$v_0 = A\delta,$$

woraus sich

$$A\delta = A'\beta; \quad A = A'\frac{\beta}{\delta}$$

ergiebt. Bezeichnen wir noch die Amplitude der ungedämpften Schwingung durch l_0, so dass $l_0 = A'$, so folgt schliesslich, mit Rücksicht auf S. 272)

$$A = \frac{T}{\tau} l_0.$$

Diesen Wert setzen wir in Gl. 19) ein und finden

$$l_1 = \frac{T}{\tau} l_0 e^{-\alpha t_1} \sin(\delta t_1).$$

Nun ist (Gl. 18) $\operatorname{tg}(\delta t_1) = \frac{\delta}{\alpha}$, folglich ist

$$\sin(\delta t_1) = \frac{\operatorname{tg}(\delta t_1)^*)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\delta t_1)}} = \frac{\delta}{\sqrt{\alpha^2+\delta^2}}.$$

Andrerseits ist (Gl. 16)

$$\frac{T}{\tau} = \frac{\sqrt{\alpha^2+\delta^2}}{\delta},$$

demnach ergiebt sich

$$l_1 = l_0 e^{-\alpha t_1}$$

und wenn wir hier für t_1 seinen Wert aus 18) einsetzen,

$$l_1 = l_0 e^{-\frac{\alpha}{\delta}\operatorname{arc\,tg}\frac{\delta}{\alpha}}$$

oder schliesslich (Gl. 22)

$$27) \quad l_1 = l_0 e^{-\frac{\Lambda}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\pi}{\Lambda}}.$$

§ 3. Berechnung der mittleren Weglänge der Gasmoleküle nach Clausius.

Nach den Anschauungen der kinetischen Gastheorie verhält sich ein Gas wie ein Haufen ideal elastischer Kugeln, die im Raum mit

*) Vgl. Formel 34 des Anhangs.

einer gewissen Geschwindigkeit umherfliegen und beim Anprall an die das Gas einschliessende Wand von dieser nach den Gesetzen des Stosses reflektiert werden. Neben dem Anprall an die umhüllenden Wände, der den Druck der Gase bedingt, ist von grosser theoretischer Wichtigkeit der Anprall der elastischen Kugeln (Moleküle) untereinander, der für die Theorie der inneren Reibung, Wärmeleitung und Diffusion der Gase von fundamentaler Bedeutung ist. Ein Anprall zweier Moleküle erfolgt, wenn ihre Centra sich bis zum Abstand des doppelten Radius eines Moleküles genähert haben. Wir wollen im folgenden berechnen, wie oft (im Mittel) ein Molekül in der Zeiteinheit mit anderen kollidiert und wie gross der (geradlinige) Weg ist, den ein Molekül (im Mittel) zwischen zwei Zusammenstössen zurücklegt.*)

1. Wir wollen zunächst eine vorbereitende Aufgabe behandeln, nämlich die mittlere Weglänge für den Fall berechnen, dass ein einziges Molekül sich mit der Geschwindigkeit u bewegt, während alle anderen, regellos im Raum verteilten Moleküle ruhen. Unter diesen Umständen wollen wir die Wahrscheinlichkeit W dafür, dass das in Bewegung begriffene Molekül mindestens den Weg 1 zurücklegt, ohne anzustossen, mit

$$W = \frac{1}{a}$$

bezeichnen, welche Grösse natürlich einen echten Bruch repräsentiert; die Bedeutung dieser Grösse ist also die, dass z. B. unter 1000 Fällen $\frac{1000}{a}$ vorkommen, in denen unser Molekül einen Weg 1 oder einen grösseren Weg zurücklegt. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Molekül mindestens einen Weg 2 zurücklegt,

$$\frac{1}{a}\frac{1}{a} = \frac{1}{a^2},$$

dafür, dass es mindestens einen Weg 3 zurücklegt,

$$\frac{1}{a^3},$$

dafür schliesslich, dass es einen Weg x zurücklegt,

$$W(x) = \frac{1}{a^x}.$$

---

*) Näheres siehe die Lehrbücher der Physik oder Nernst, Theoret. Chemie S. 172 ff.

Wenn wir darin

$$a = e^{\alpha}$$

substituieren, so wird

$$1) \quad W(x) = e^{-\alpha x},$$

wo also α eine neue Konstante ist.

Nun wollen wir annehmen, dass ein Würfel vom Inhalt λ^3 im Durchschnitt immer je eines der (ruhend gedachten) Moleküle enthält. Würden wir uns die Moleküle geordnet denken, so würde offenbar der Abstand zweier benachbarter Molekülcentra immer je λ betragen, doch können wir an der regellosen Verteilung festhalten. Denken wir uns durch unsern Molekülhaufen jedoch zwei parallele Ebenen im Abstand λ gelegt, so dürfen wir annehmen, dass im Durchschnitt die so herausgeschnittene Molekülschicht pro Flächeneinheit $\frac{1}{\lambda^2}$ Moleküle, d. h. pro Fläche λ^2 1 Molekül enthält. Denken wir uns das betrachtete Molekül nunmehr senkrecht die so herausgeschnittene Molekülschicht durchquerend, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es innerhalb dieser Schicht anstösst, offenbar gleich dem Verhältnis des von den ruhenden Molekülen versperrten Flächenraums zum gesamten Flächenraum. Dies Verhältnis ist aber

$$\rho^2\pi : \lambda^2,$$

wenn ρ den Abstand bezeichnet, bis zu dem das bewegte Molekül sich einem ruhenden nähern muss, um anzustossen; dieser Abstand ist nach S. 276 gleich dem Durchmesser eines Moleküls.

Die Wahrscheinlichkeit, dass unser Molekül die betrachtete Molekülschicht senkrecht durchfliegt, ohne anzustossen, ist also

$$1 - \frac{\rho^2\pi}{\lambda^2}$$

und aus Gl. 1) folgt

$$2) \quad W(\lambda) = e^{-\alpha\lambda} = 1 - \frac{\rho^2\pi}{\lambda^2}.$$

Nun besagt eine Grundannahme aller Rechnungen, welche die kinetische Theorie idealer Gase betreffen, dass der gegenseitige Abstand der Moleküle gross im Vergleich zu ihren Dimensionen ist; würden wir diese Annahme nicht machen, so wäre es z. B. schwer verständlich, wie das Volumen eines Gases durch Anwendung starken Druckes so ungeheuer verkleinert werden kann. Es ist also $\frac{\rho^2\pi}{\lambda^2}$ sehr klein gegen eins und entsprechend $\alpha\lambda$ eine ebenfalls im Vergleich zu 1 sehr kleine Grösse, so dass wir nach S. 202 setzen können

$$3) \quad e^{-\alpha\lambda} = 1 - \alpha\lambda.$$

Aus 2) und 3) folgt aber

$$4) \quad \alpha = \frac{\rho^2 \pi}{\lambda^3}; \quad W(x) = e^{\frac{-\rho^2 \pi}{\lambda^3} x}.$$

$W(x)$ liefert uns also die Wahrscheinlichkeit, dass unser Molekül einen Weg zurücklegt, der mindestens gleich x ist; die Wahrscheinlichkeit, dass es einen Weg zurücklegt, der mindestens gleich $x+dx$ ist, beträgt daher $W(x+dx)$, und die Wahrscheinlichkeit, dass das Molekül anstösst, nachdem es den Weg x zurückgelegt, den Weg $x+dx$ aber noch nicht vollendet hat, beträgt

$$W(x) - W(x+dx) = -W'(x)\,dx$$

oder

$$\alpha e^{-\alpha x}\,dx.$$

Betrachten wir eine sehr grosse*) Zahl aufeinanderfolgender Zusammenstösse des bewegten Moleküles mit ruhenden, etwa n, so wird von diesen der Bruchteil

$$n \,.\, \alpha e^{-\alpha x}\,dx$$

eine zwischen x und $x+dx$ liegende freie Weglänge besitzen; um den Mittelwert l' aller vorkommenden Weglängen zu erhalten, müssen alle möglichen, d. h. zwischen 0 und ∞ liegenden Weglängen summiert und es muss daraus das Mittel gezogen werden. Die Summe der Weglängen x bis $x+dx$ beträgt nun aber

$$x n \,.\, \alpha e^{-\alpha x}\,dx$$

(= Anzahl mal Weglänge), die Summen aller möglichen

$$\int_0^\infty x \,.\, n \,.\, \alpha \,.\, e^{-\alpha x} dx$$

und der Mittelwert l' ist davon wieder der $n$te Teil, also

$$l' = \frac{1}{n} \int_0^\infty x \,.\, n \,.\, \alpha \,.\, e^{-\alpha x}\,dx = \int_0^\infty x \,.\, \alpha \,.\, e^{-\alpha x}\,dx.$$

Der Wert des unbestimmten Integrals beträgt aber, wie man leicht durch Differentiation verifiziert und wie auch nach der Methode der teilweisen Integration (S. 112) unmittelbar folgt,

$$\int x \alpha e^{-\alpha x}\,dx = -x e^{-\alpha x} - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x};$$

setzten wir hierin zunächst die obere Grenze ∞ ein, so wird (S. 221)

*) damit die Wahrscheinlichkeitsrechnung anwendbar ist!

$$\lim \frac{x}{e^{ax}} = 0 \text{ und } \frac{1}{a} e^{-x} = 0;$$

setzen wir die untere Grenze 0 ein, so wird

$$x e^{-ax} = 0, \quad \frac{1}{a} e^{-ax} = \frac{1}{a}$$

und wir finden nach Gl. 4) für die mittlere Weglänge

$$5) \quad l' = \frac{1}{a} = \frac{\lambda^3}{\rho^2 \pi}.$$

Die Zahl der Zusammenstösse pro Zeiteinheit ist ferner

$$6) \quad \Pi' = \frac{u}{l'} = \frac{u \rho^2 \pi}{\lambda^3}.$$

2. Nun wollen wir annehmen, dass die anderen Moleküle auch bewegt sind, doch sollen sie nicht nach allen Richtungen hin- und herfahren, sondern sämtlich die gleiche und gleichgerichtete Geschwindigkeit u besitzen, die also der Grösse nach gleich der des betrachteten Moleküls ist, während s mit der Bewegungsrichtung des betrachteten Moleküles den Winkel φ bilden möge; dann ist offenbar in Gl. 6) anstatt u einfach die relative Geschwindigkeit v unseres betrachteten Moleküls gegen die übrigen einzusetzen, und wir finden für diesen Fall die Zahl der Zusammenstösse

$$7) \quad \Pi'' = \frac{v \rho^2 \pi}{\lambda^3},$$

worin die relative Geschwindigkeit v sich nach der Gleichung

$$8) \quad v = 2 u \sin \frac{\varphi}{2}$$

berechnet (v ist nach dem Gesetz des Parallelogramms der Geschwindigkeiten die Basis in einem gleichschenkligen Dreieck, in dem die beiden anderen Seiten gleich u sind und dessen Scheitelwinkel φ beträgt).

3. Nun können wir schliesslich die Zahl der Zusammenstösse, die ein Molekül pro Zeiteinheit erfährt, das sich unter lauter hin- und herfahrenden Molekülen befindet, in der Weise berechnen, dass wir uns die hin- und herfahrenden Moleküle in einzelne Gruppen von gleicher Bewegungsrichtung zerlegen und hierauf Gl. 7) anwenden. Da alle Bewegungsrichtungen gleichmässig vorkommen, so wird von den insgesamt vorhandenen Molekülen ein Bruchteil m eine zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ liegende Bewegungsrichtung besitzen, der sich aus der Gleichung bestimmt

$$9) \quad m = \frac{2 \pi \sin \varphi \, d\varphi}{4 \pi} = \frac{\sin \varphi \, d\varphi}{2};$$

denn der Raumwinkel, innerhalb dessen die betrachteten Bewegungsrichtungen liegen, beträgt $2\pi \sin\varphi\, d\varphi$ und der Raumwinkel, innerhalb dessen alle vorkommenden Bewegungsrichtungen liegen müssen, beträgt 4π, und das Verhältnis dieser Raumwinkel liefert den gesuchten Bruchteil m. Die Zahl der Zusammenstösse des betrachteten Moleküles mit der herausgegriffenen Molekülschar ist also

$$\frac{v\rho^2\pi}{\lambda^3} m = \frac{2u \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \rho^2 \cdot \pi}{\lambda^3} \cdot \frac{\sin\varphi}{2} d\varphi$$

(Gl. 8. u. 9) oder vereinfacht und umgeformt nach Formel 39, Anhang,

$$2\frac{u\rho^2\pi}{\lambda^3}\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2 \cos\frac{\varphi}{2} d\varphi.$$

Um nun schliesslich die Gesamtzahl Π aller Zusammenstösse zu erhalten, haben wir einfach über alle vorkommenden Bewegungsrichtungen zu summieren:

$$10)\quad \Pi = \int_0^{\pi} \frac{2u\rho^2\pi}{\lambda^3}\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2 \cos\frac{\varphi}{2} d\varphi = \frac{2u\rho^2\pi}{\lambda^3}\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2 \cos\frac{\varphi}{2} d\varphi.$$

Nun ist aber

$$\int\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2 \cos\frac{\varphi}{2} d\varphi = 2\int\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^3 d\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{2}{3}\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^3 + \text{Konst.}$$

und somit

$$\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2 \cos\frac{\varphi}{2} d\varphi = \frac{2}{3}.$$

In Gleichung 10) eingesetzt, folgt also schliesslich

$$11)\quad \Pi = \frac{4}{3}\frac{u\rho^2\pi}{\lambda^3}$$

und für die gesuchte mittlere Weglänge l

$$12)\quad l = \frac{u}{\Pi} = \frac{3}{4}\frac{\lambda^3}{\rho^2\pi},$$

der von Clausius gefundene Ausdruck.

§ 4. Anwendungen des ersten Wärmesatzes. Veränderung von Reaktionswärmen mit der Temperatur.

Der erste Wärmesatz (Gesetz von der Erhaltung der Energie) besagt, dass die Energieänderungen eines Systems unabhängig von dem Wege sind, auf welchem sich diese Aenderungen vollziehen.

Wir betrachten z. B. ein System reaktionsfähiger Stoffe und lassen bei der Temperatur T die betreffende Reaktion sich abspielen, wobei die Reaktionswärme Q vom System nach aussen abgegeben werden möge. Hierauf erhöhen wir die Temperatur des Systems um dT, wozu wir die Wärmemenge $c'dT$ zuführen müssen, wenn c' die Wärmekapazität des Systems nach vollzogener Reaktion bedeutet. Die Energieänderung beträgt somit

$$1) \quad Q - c'dT,$$

wobei wir die vom System abgegebenen Energiebeträge positiv zählen.

Wir können das System aber auch auf folgendem Wege vom gleichen Anfangszustand zum gleichen Endzustand bringen. Wir erwärmen zuerst das System von T auf $T+dT$, wobei wir die Wärmemenge cdT zuführen müssen, wenn c die Wärmekapazität des Systems vor vollzogener Reaktion bedeutet. Hierauf lassen wir bei $T+dT$ die Reaktion sich abspielen, wobei die Wärmemenge $Q+dQ$ vom System entwickelt werden möge. Die Energieänderung beträgt in diesem Falle somit

$$2) \quad Q+dQ-cdT.$$

Da nach dem ersten Wärmesatz 1) und 2) einander gleich sein müssen, so folgt

$$dQ = dT(c-c')$$

oder

$$\frac{dQ}{dT} = c - c'.$$

Die Differenz der Wärmekapazitäten der reagierenden und der gebildeten Substanzen liefert also die Aenderung der Reaktionswärme mit der Temperatur, ein für die Thermochemie wichtiges Resultat.

Wird während der Reaktion oder der Erwärmung äussere Arbeit geleistet, so ist diese natürlich mit der äquivalenten Wärmemenge in Rechnung zu setzen.

§ 5. Verdünnungswärme der Schwefelsäure.

Für die Wärmeentwicklung W, die man bei Hinzufügung von 1 gr H_2SO_4 zu x gr H_2O beobachtet, hat Thomsen empirisch die Formel

$$W = A\frac{x}{x+B}$$

gefunden; A und B sind Konstanten. Machen wir x sehr gross, d. h. fügen wir zu sehr viel Wasser 1 gr H_2SO_4, so wird die Wärmeentwicklung

$$W_\infty = A,$$

wodurch die Natur der Konstanten A eine einfache Bedeutung erhalten hat.

Fügen wir hingegen zu 1 gr H_2SO_4 eine sehr geringe Menge Wasser, die wir mit dx bezeichnen wollen, so erhalten wir die Wärmeentwicklung

$$A\frac{dx}{dx+B} \text{ oder } A\frac{dx}{B},$$

da wir ja dx gegen B vernachlässigen können; fügen wir zu sehr viel H_2SO_4 1 gr Wasser, so wird offenbar die Wärmeentwicklung das $\frac{1}{dx}$fache oder es wird

$$W_0 = \frac{A}{B};$$

$\frac{A}{B}$ bedeutet also die Wärmeentwicklung W_0 bei dem Hinzufügen von 1 gr Wasser zu einer grossen Quantität reiner Schwefelsäure.

Fügen wir x_1 gr H_2O zu einer Mischung von Schwefelsäure und Wasser, die auf 1 gr H_2SO_4 x gr H_2O enthält, so ist nach den Grundprinzipien der Thermochemie die beobachtete Wärmeentwicklung gleich der Differenz derjenigen Wärmemengen, die bei der Mischung von 1 H_2SO_4 mit $x_1 + x$ und mit x gr H_2O beobachtet werden; es wird also jene Wärmeentwicklung

$$A\left(\frac{x_1+x}{x_1+x+B} - \frac{x}{x+B}\right).$$

Denken wir uns x_1 sehr klein, etwa gleich dx, so erhalten wir

$$dW = A\left(\frac{x+dx}{x+dx+B} - \frac{x}{x+B}\right);$$

es bedeutet dW also die (sehr kleine) Wärmeentwicklung bei der Hinzufügung der sehr kleinen Wassermenge dx zu einer Lösung, die aus 1 $H_2SO_4 + x H_2O$ besteht. Der rechtsstehende Ausdruck hat die Form

$$f(x+dx) - f(x),$$

ist also gleich

$$f'(x)\,dx.$$

Differenzieren wir $f(x)$, so wird

$$\frac{d}{dx}\left(A\frac{x}{x+B}\right) = A\frac{B}{(x+B)^2}$$

und somit

$$dW = \frac{AB}{(x+B)^2}\,dx.$$

Fügen wir zu einer sehr grossen Menge der Lösung von der Zusammensetzung $1\,H_2SO_4 + x\,H_2O$ 1 gr H_2O, so wird die hierbei auftretende Wärmemenge W'_x das $\frac{1}{dx}$fache von dW, d. h. wir finden für obige (bei manchen Rechnungen wichtige) Wärmeentwicklung

$$W'_x = \frac{dW}{dx} = \frac{AB}{(x+B)^2}.$$

Der Differentialquotient $\frac{dW}{dx}$ hat also eine einfache thermochemische Bedeutung.

Uebungsaufgaben.

§ 1. Differentiation entwickelter Funktionen.

1) $y=(x+1)^2(2x-3)$ $\quad \frac{dy}{dx}=6x^2+2x-4$

2) $y=\frac{5+x}{5-x}$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{10}{(5-x)^2}$

3) $y=\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$ $\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{4a^2x}{(a^2+x^2)^2}$

4) $y=\frac{5+3x+x^2}{5-3x+x^2}$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{6(5-x^2)}{(5-3x+x^2)^2}$

5) $y=\frac{1}{a^2-ax+x^2}$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{a-2x}{(a^2-ax+x^2)^2}$

6) $y=x^2\sqrt{1+x^2}$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{3x^3+2x}{\sqrt{x^2+1}}$

7) $y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

8) $y=\frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)^2}{\sqrt{1+x^2}}$

9) $y=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

10) $y=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{2(\sqrt{1+x^2}+x)^2}{\sqrt{1+x^2}}$

11) $y=(\frac{1}{\sqrt{x}}+2)(x-\sqrt{x})$ $\quad \frac{dy}{dx}=2-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

12) $y=\ln(1+x^2)$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{2x}{1+x^2}$

13) $y = \ln \frac{x}{1-x^2}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1+x^2}{x(1-x^2)}$

14) $y = \ln \sqrt{\frac{5x^2+3}{5x^2-3}}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{30x}{9-25x^4}$

15) $y = (1+x)\ln(1+x)$ $\quad \frac{dy}{dx} = 1 + \ln(1+x)$

16) $y = e^x x^n$ $\quad \frac{dy}{dx} = e^x x^{n-1}(n+x)$

17) $y = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$, $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^4 x}$

18) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x - 2$ $\quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$

19) $y = \frac{\sin x}{a + b\cos x}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{a\cos x + b}{(a+b\cos x)^2}$

20) $y = \sin(px+q)$ $\quad \frac{dy}{dx} = p\cos(px+q)$

21) $y = \ln(\cos x + \sin x)$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$

22) $y = \ln \sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$ $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2a^2 x\,dx}{a^4 - x^4}$

23) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

24) $y = e^{ax}(a\sin x - \cos x)$ $\quad \frac{dy}{dx} = (a^2-1)\,e^{ax}\sin x$

25) $y = \operatorname{arc\,sin} \frac{1-x^2}{1+x^2}$ $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{1+x^2}$

26) $y = \operatorname{arc\,tg} x\,\frac{2x}{1-x^2}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$

27) $y = (\ln u)^n$ $\quad dy = \frac{n(\ln u)^{n-1}\,du}{u}$

28) $y = \ln(\ln u)$ $\quad dy = \frac{du}{u \,.\, \ln u}$

29) $y = \ln(\sin au + b)$ $\quad dy = a\operatorname{ctg}(au+b)\,du$

30) $y = e^{\sin u}$ $\quad dy = e^{\sin u}\cos u\,du$

§ 2. Höhere Differentialquotienten, Differentiation der unentwickelten Funktionen und der Funktionen mehrerer Variabeln.

1) $y=(a+x^2)^2$
$y'=4x(a+x^2),\ y''=4(a+3x^2),\ y'''=24x,\ y''''=24.$

2) $y=\ln(a+bx)$
$y'=\frac{b}{a+bx},\ y''=-\frac{b^2}{(a+bx)^2},\ y'''=\frac{2b^3}{(a+bx)^3}\cdots\cdots$

3) $y=\sqrt{x},$
$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ y''=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}\cdots y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots}{2^n\sqrt{x^{2n-1}}}.$

4) $y=(\alpha+\beta x)^\lambda$
$y^{(n)}=\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)\beta^n(\alpha+\beta x)^{\lambda-n}.$

5) $y=e^{ax}+e^{-ax}$
$y^{(n)}=a^n(e^{ax}\pm e^{-ax}).$

Das positive oder negative Zeichen, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

6) $x^2+y^2-a^2=0;$*) $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$

7) $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$**)
$\frac{dy}{dx}=-\frac{Ax+By+D}{Bx+Cy+E}.$

8) $(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=0$***)
$\frac{dy}{dx}=-\frac{x(x^2+y^2-c^2)}{y(x^2+y^2+c^2)}.$

9) $\frac{y}{x}=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y};\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}.$

10) $y^5-5axy+x^5=0;\quad \frac{dy}{dx}=\frac{ay-x^4}{y^4-ax}.$

11) $u=\frac{1}{(x^2+y^2)^2};\qquad du=-\frac{4(x\,dx+y\,dy)}{(x^2+y^2)^3}.$

12) $u=y\ln x;\qquad du=\frac{y}{x}dx+\ln x\,dy.$

---

*) Gleichung des Kreises.
**) Gleichung eines Kegelschnitts; vgl. S. 31.
***) Gleichung der Lemniscate.

13) $u = \sin(x+y)$; $du = \cos(x+y)(dx+dy)$.

14) $u = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$; $du = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$.

15) $u = \ln\frac{x+y}{x-y}$; $du = 2\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2-y^2}$.

16) $u = \operatorname{arc\,tg}\frac{x-y}{x+y}$; $du = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$.

§ 3. Werte, die unter unbestimmter Form erscheinen.

1) $u = \frac{x^3-1}{x^3-2x^2+2x-1}$; für $x=1$ ist $u=3$.

2) $u = \frac{x^3+x^2-4x-4}{x^4+2x^3-3x^2-8x-4}$.

Für $x = -1,\ 2,\ -2$ ist $u = \infty,\ \frac{1}{3},\ -1$.

3) $u = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$; für $x=a$ ist $u = \frac{1}{\sqrt{2a}}$.

4) $u = \frac{1-\sin x+\cos x}{\sin 2x-\cos x}$; für $x=\frac{\pi}{2}$ ist $u=1$.

5) $u = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$; für $x=0$ ist $u=\frac{1}{3}$.

6) $u = \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$; für $x=0$ ist $u=2$.

7) $u = \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$; für $x=a$ ist $u=\cos a$.

8) $u = \frac{e^x+e^{-x}-2}{\cos x-1}$; für $x=0$ ist $u=-2$.

9) $u = \frac{\ln(x^2-3)}{x-2}$; für $x=2$ ist $u=4$.

10) $u = \frac{\ln(1+x)-\sin x}{x^2}$; für $x=0$ ist $u=-\frac{1}{2}$.

11) $u = \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x-\sin x}$; für $x=0$ ist $u=3$.

12) $u = \frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$; für $x=0$ ist $u=2$.

13) $u = \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$; für $x=0$ ist $u=0$.

14) $u=(x-a)[\ln(x-a)]^2$; für $x=a$ ist $u=0$.

15) $u=(x-\frac{\pi}{2})\operatorname{tg} x$; für $x=\frac{\pi}{2}$ ist $u=-1$.

16) $u=(1-x)\ln(1-x)$; für $x=1$ ist $u=0$.

17) $u=\frac{x^2-1}{x^2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$; für $x=1$ ist $u=\frac{2}{\pi}$.

18) $u=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$; für $x=0$ ist $u=0$.

19) $u=\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}$; für $x=1$ ist $u=\frac{1}{2}$.

20) $u=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}$; für $x=0$ ist $u=\frac{1}{3}$.

21) $u=\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1-x^3}$; für $x=1$ ist $u=-\frac{1}{2}$.

§ 4. Unbestimmte Integrale.

1) $\int\frac{x\,dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2-a^2)+C$ *)

2) $\int(x^2-5x)(2x-5)\,dx=\frac{1}{2}(x^2-5x)^2+C$

3) $\int(2x+1)^3\,dx=\frac{1}{8}(2x+1)^4+C$

4) $\int(3x^2+5x-1)^n(6x+5)\,dx=\frac{(3x^2+5x-1)^{n+1}}{n+1}$

5) $\int\frac{3x^2\,dx}{a^3+x^3}=\ln(a^3+x^3)+C$

6) $\int\frac{x^3\,dx}{a^4+x^4}=\frac{1}{4}\ln(a^4+x^4)+C$

7) $\int\frac{(5+x)\,dx}{(10x+x^2)}=\frac{1}{2}\ln(10x+x^2)+C$

8) $\int\frac{2x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-2\sqrt{a^2-x^2}+C$

*) Die Beispiele 1—10 suche man so zu behandeln, dass die unter dem $\int$ stehenden Ausdrücke durch Multiplikation mit geeigneten Zahlenkoeffizienten direkt in genaue Differentialausdrücke übergehen.

9) $\int \cos^2 x \sin x \, dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$

10) $\int \sin^2 x \cos x \, dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C$

11) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C$

12) $\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a} x$

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a} + C$

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$

15) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a + x}{a - x} + C$

16) $\int (x^2 - \frac{1}{x}) \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x + C$

17) $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 5} = -\frac{1}{4} \ln \frac{x - 1}{5 - x} + C$

18) $\int \frac{dx}{2x - 3x^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{x}{2 - 3x} + C$

19) $\int \frac{(3x + 2) \, dx}{x^2 - x - 2} = \frac{8}{3} \ln (x - 2) + \frac{1}{3} \ln (x + 1) + C$

20) $\int \frac{x^2 + 1}{x^3 - x} dx = \ln \frac{x^2 - 1}{x} + C$

21) $\int \frac{4x^2 - 48x + 90}{(x-3)(x+3)(x-6)} dx = \ln (x-3) - 2 \ln (x-6) + 5 \ln (x+3) + C$
$= \ln \frac{(x-3)(x+3)^5}{(x-6)^2} + C$

22) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x + 2 - \sqrt{2}}{x + 2 + \sqrt{2}} + C$

23) $\int \frac{x \, dx}{1 + \sqrt{1 + x}} = (1 + x) \left(\frac{2}{3} \sqrt{1 + x} - 1 \right) + C$

24) $\int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln (x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C$

25) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{x}{a} + C$

26) $\int \cos(px+q)\,dx = \frac{1}{p}\sin(px+q) + C$

27) $\int \sin(px+q)\,dx = -\frac{1}{p}\cos(px+q) + C$

28) $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + C$

29) $\int \sin^2 x\,dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + C$

30) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = x\operatorname{tg} x + \ln\cos x + C$

31) $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x} = -x\operatorname{ctg} x + \ln\sin x + C$

32) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\sin x}} = 2\sqrt{\sin x} + C$

33) $\int \cos^3 x\,dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$

34) $\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln x) + C$

35) $\int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C.$

§ 5. Bestimmte Integrale.

1) $\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{4a}$

2) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1$

3) $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{2}$

4) $\int_0^1 e^x\,dx = e - 1$

5) $\int_0^1 xe^x\,dx = 1$

6) $\int_1^e \frac{dx}{x} = 1$

7) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2$

8) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 0$ 10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$

9) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \frac{3\pi}{4}$ 11) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx = \frac{1}{2}\ln 2$

12) $\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \ln 2.$

§ 6. Maxima und Minima.

1) $y = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$.

Maximum $x = 4$, Minimum $x = 16$.

2) $y = x + \frac{a^2}{x}$ (a positiv).

Maximum $x = a$, Minimum $x = -a$.

3) $y = x + \sqrt{1 - x}$.

Maximum $x = \frac{3}{4}$.

4) $y = x^x$.

Maximum $x = \frac{1}{e}$.

5) $y = x^{\frac{1}{x}}$.

Maximum $x = e$.

6. Auf einer Horizontalebene sind zwei Punkte A und B und ihre Entfernung a gegeben. Es fragt sich, in welche Höhe h senkrecht über A ein leuchtender Punkt S gebracht werden muss, damit in B ein Maximum der Lichtstärke eintritt.

Die Lichtstärke ist dem Quadrat der Entfernung SB umgekehrt und dem Sinus des Winkels des auffallenden Strahles SB direkt proportional zu setzen.

Lösung: $h = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

7. Aus einem cylindrischen Baumstamm vom Durchmesser d einen Balken von rechtwinkligem Querschnitt und von möglichst grosser Tragfähigkeit herauszuschneiden.

Der Querschnitt des Balkens bildet ein Rechteck, das dem kreisförmigen Querschnitt des Baumstamms eingeschrieben ist. Nach empirischen Gesetzen ist die Tragfähigkeit proportional dem Produkt aus der Breite b und dem Quadrat der Höhe h des Rechtecks.

Lösung: $b = \frac{d}{3}\sqrt{3}, \quad h = \frac{d}{3}\sqrt{6}.$

8. In der Horizontalebene soll man einen Punkt P so bestimmen, dass von ihm aus ein vertikal stehender Gegenstand AB möglichst gross erscheint, d. h. unter möglichst grossem Gesichtswinkel gesehen wird.

Sind a und b die Entfernungen der Punkte A und B von der Horizontalebene und x der Abstand des gesuchten Punktes P vom Fusspunkte O der Vertikalen AB, so ist

$$x = \sqrt{ab}.$$

Diese Aufgabe bestimmt den günstigsten Standort für die Betrachtung vertikal stehender Gegenstände.

9. In ein gegebenes Dreieck das grösste Rechteck einzuschreiben, das mit einer Seite in die Grundlinie des Dreiecks fällt.

Lösung: Die Höhe des Rechtecks ist gleich der Hälfte der Dreieckshöhe.

10. Dasjenige Rechteck zu bestimmen, das a) bei gegebenem Umfang einen grössten Inhalt, b) bei gegebenem Inhalt einen kleinsten Umfang besitzt.

Lösung zu a) und b): Das Quadrat.

Anhang.

Formel-Sammlung.

§ 1. Potenzen und Wurzeln.

1) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

2) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

3) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

4) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

5) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

6) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

7) $a^m : a^n = a^{m-n}$

8) $(a^m)^n = a^{mn}$

9) $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

10) $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a:b}$

11) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$

12) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$

13) Unter a^{-m} versteht man $\frac{1}{a^m}$

14) Unter $a^{\frac{1}{q}}$ versteht man $\sqrt[q]{a}$

15) Unter $a^{\frac{p}{q}}$ versteht man $\sqrt[q]{a^p}=\left(\sqrt[q]{a}\right)^p$.

Division algebraischer Ausdrücke durch einander. Algebraische Ausdrücke, die nach einer Variabeln geordnet sind, kann man genau wie Zahlen durch einander dividieren, indem man das

erste Glied des Dividendus durch das erste Glied des Divisors **dividiert**, dann das Produkt aus dem so erhaltenen Quotienten und dem Divisor von dem Dividendus subtrahiert, und nun den Rest ebenso behandelt, wie den ursprünglichen Dividendus. Dies wird so lange fortgesetzt, bis entweder die Division aufgeht, oder ein Rest bleibt, der eine weitere Division nicht gestattet.

Beispiele.
$$\begin{array}{l} x^3-6x^2+11x-6 : x-1 = x^2-5x+6 \\ \underline{x^3-x^2} \\ \quad -5x^2+11x-6 \\ \quad \underline{-5x^2+5x} \\ \qquad\qquad 6x-6 \\ \qquad\qquad \underline{6x-6} \end{array}$$

Die Division geht also auf und der Quotient hat den Wert x^2-5x+6; d. h. es ist

$$\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-1} = x^2-5x+6$$

$$\begin{array}{l} 3x^4-\ 8x^2+2 : x^2-4 = 3x^2+4 \\ \underline{3x^4-12x^2} \\ \qquad 4x^2+2 \\ \qquad \underline{4x^2-16} \\ \qquad\qquad 18 \end{array}$$

Die Division lässt den Rest 18, es ist also

$$\frac{3x^4-8x^2+2}{x^2-4} = 3x^2+4+\frac{18}{x^2-4}.$$

§ 2. Die Logarithmen.

Zu den gewöhnlichen Logarithmen, deren Basis 10 ist, gelangt man bekanntlich dadurch, dass man alle Zahlen als Potenzen von 10 auffasst. Der zugehörige Exponent heisst alsdann der Logarithmus der Zahl. Der Logarithmus giebt also an, die wievielte Potenz von 10 die bezügliche Zahl ist. So ist, wenn

$$10^3 = 1000, \quad 10^{0{,}30103\ldots} = 2$$

ist, der Exponent 3 der Logarithmus von 1000, der Exponent 0,30103.. der Logarithmus von 2, und dies schreibt man unter Anwendung des Zeichens $\overset{10}{\log}$ in der Form

$$3 = \overset{10}{\log} 1000, \quad 0{,}30103\ldots = \overset{10}{\log} 2.$$

Das nämliche gilt, wenn man die Basis 10 durch irgend eine andere Basis α ersetzt. Wählt man als Basis die Zahl $e = 2{,}7182818284\ldots$, so nennt man die zugehörigen Logarithmen **natürliche** Logarithmen; das System der natürlichen Logarithmen läuft also darauf hinaus, alle Zahlen als Potenzen von e zu betrachten. Ist daher die Zahl a die αte Potenz von e, d. h. ist

$$e^{\alpha} = a,$$

so heisst α der natürliche Logarithmus von a und man schreibt

$$\alpha = \overset{e}{\log} a = \ln a.$$

Aus dieser Definition erhält man sofort, wenn man in einer der beiden Gleichungen α resp. a durch ihre Werte aus der andern Gleichung ersetzt,

$$16) \quad e^{\ln a} = a$$

$$17) \quad \ln e^{\alpha} = \alpha,$$

im besondern, für $\alpha = 1$,

$$18) \quad \ln e = 1.$$

Ist β die Basis irgend eines Logarithmensystems und ist

$$\beta^x = a, \quad \beta^y = b$$

oder, anders geschrieben,

$$x = \overset{\beta}{\log} a, \quad y = \overset{\beta}{\log} b,$$

so folgt daraus durch Multiplikation resp. Division

$$\beta^{x+y} = ab, \quad \beta^{x-y} = a - b$$

oder

$$x + y = \overset{\beta}{\log}(ab), \quad x - y = \overset{\beta}{\log}(a : b).$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen

$$19) \quad \log(ab) = \log a + \log b^{*})$$

$$20) \quad \log(a : b) = \log a - \log b.$$

Analog beweist man folgende Formeln:

$$21) \quad \log(a^n) = n \log a$$

$$22) \quad \log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a$$

---

*) Die Basis β der Logarithmen kann jede beliebige Zahl sein; deshalb ist sie in dieser und den folgenden Formeln weggelassen worden. — Um die **Brigg**'schen Logarithmen in natürliche zu verwandeln, müssen wir jene 2,3026 multiplizieren.

$$23)\quad \overset{\beta}{\log}\,\beta = 1, \quad \overset{\beta}{\log}\,1 = 0$$

$$24)\quad \log\frac{1}{a} = -\log a.$$

Nämlich $\log\frac{1}{a} = \log 1 - \log a = -\log a$.

§ 3. Die trigonometrischen Formeln.

Nach den auf S. 61 gegebenen Definitionen und Festsetzungen definiert man in der höheren Mathematik die trigonometrischen Funktionen mit Hilfe eines Kreises, dessen Radius gleich der Längeneinheit ist. Aus diesen Definitionen ergeben sich (vgl. auch Fig. 32, S. 60) unmittelbar die nachfolgenden Formeln:

$$25)\quad \sin(\tfrac{\pi}{2} - x) = \cos x, \qquad \cos(\tfrac{\pi}{2} - x) = \sin x.$$

$$\operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{2} - x) = \operatorname{ctg} x, \qquad \operatorname{ctg}(\tfrac{\pi}{2} - x) = \operatorname{tg} x.$$

$$26)\quad \sin(\tfrac{\pi}{2} + x) = \cos x, \qquad \cos(\tfrac{\pi}{2} + x) = -\sin x.$$

$$\operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{2} + x) = -\operatorname{ctg} x, \qquad \operatorname{ctg}(\tfrac{\pi}{2} + x) = -\operatorname{tg} x.$$

$$27)\quad \sin(\pi - x) = \sin x, \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x.$$

$$28)\quad \operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x, \qquad \operatorname{ctg}(\pi - x) = -\operatorname{ctg} x.$$

$$29)\quad \sin(-x) = -\sin x, \qquad \cos(-x) = \cos x.$$

$$30)\quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \qquad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x.$$

Aus der Proportion $BC : OC = TA : OA$ (Fig. 32, S. 60) folgt ferner

$$31)\quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

und aus dem rechtwinkligen Dreieck OBC

$$32)\quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

woraus sich unmittelbar

$$33)\quad \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}, \quad \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

ergiebt. Aus 31) erhält man, indem man gemäss 33) $\cos x$ durch $\sin x$, bezüglich $\sin x$ durch $\cos x$ ausdrückt, und dann die entstehende Gleichung nach $\sin x$, resp. $\cos x$ auflöst,

$$34)\quad \sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}.$$

Mittelst der auf S. 203 für $\cos x$ und $\sin x$ abgeleiteten Reihen beweist man durch direkte Ausrechnung leicht die Richtigkeit der folgenden Formeln:

35) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$

36) $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y,$

37) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$

38) $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y,$

woraus sich ferner für $x = y$

39) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x,$

39a) $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$

$\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$

ergiebt. Durch Addition und Subtraktion folgt aus obigen Formeln, indem man noch

$$x+y = \alpha, \quad x-y = \beta, \text{ also}$$
$$x = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad y = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

setzt und dann für α und β wieder x und y schreibt,

40) $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

41) $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

42) $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

43) $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$

Endlich folgt aus obigen Formeln durch Division

44) $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$

45) $\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$

46) $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$

Löst man die zweite der Gleichungen 39a) nach $\cos \frac{x}{2}$ resp. $\sin \frac{x}{2}$ auf, so folgt

47) $\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

48) $\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

aus ihnen durch Division

$$49)\quad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}.$$

§ 4. Reihen und Summenformeln.

Die Reihe, deren Glieder

$$a,\quad a+d,\quad a+2d,\quad a+3d\ldots.$$

sind, heisst arithmetische Reihe. Die Summe s_n ihrer ersten n Glieder ist

$$50)\quad s_n=\frac{n}{2}(2a+[n-1]d).$$

Das erste und letzte, das zweite und vorletzte Glied u. s. w. geben nämlich als Summe übereinstimmend $2a+(n-1)d$; das $n$fache hiervon ist also gleich $2s_n$.

Ist nun besonders $a=1$, $d=1$, so geht die Reihe in die Reihe der Zahlen

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4\ldots$$

über; die Summe der ersten n Zahlen ist daher

$$51)\quad 1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Die Reihe

$$a,\quad ae,\quad ae^2,\quad ae^3\ldots..$$

heisst geometrische Reihe. Die Summe s_n ihrer ersten n Glieder ist

$$52)\quad s_n=\frac{a(e^n-1)}{e-1}=\frac{a(1-e^n)}{1-e}.$$

Man erhält diese Formel durch Subtraktion der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} s_n &= a+ae+ae^2+\cdots+ae^{n-1}\\ es_n &= \quad ae+ae^2+\cdots+ae^{n-1}+ae^n \end{aligned}$$

von einander.

Im besondern folgt, wenn $a=1$ ist,

$$53)\quad 1+e+e^2+\cdots+e^{n-1}=\frac{1-e^n}{1-e}.$$

Setzt man in dieser Gleichung für e den Wert $b:a$, so erhält man nach Multiplikation mit a^{n-1}

$$54)\quad a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}=\frac{a^n-b^n}{a-b}$$

oder auch

$$55)\quad a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

Im besondern ist also

$$56)\quad a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

57) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

58) $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

u. s. w. u. s. w.

Die Formel für die Summe der n ersten Quadrate

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$

ergiebt sich folgendermassen. Es ist offenbar

$$(2a-1)+(2a+1)=4a$$

oder, wie durch Multiplikation mit $2a$ folgt

$$(2a-1)2a+2a(2a+1)=8a^2.$$

Setzt man in dieser Gleichung für a der Reihe nach 1, 2, 3 .... n, so erhält man

$$1.2+2.3=8.1^2$$
$$3.4+4.5=8.2^2$$
$$5.6+7.8=8.3^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(2n-1)2n+2n(2n+1)=8.n^2$$

und hieraus durch Addition zunächst

$$1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots+2n(2n+1)=8(1^2+2^2+\cdots+n^2).$$

Ferner folgt aus der leicht zu verifizierenden Gleichung

$$\frac{a+2}{1.2.3}-\frac{(a-1)}{1.2.3}=\frac{3}{1.2.3}=\frac{1}{1.2}$$

durch Multiplikation mit $a(a+1)$

$$\frac{a(a+1)(a+2)}{1.2.3}-\frac{(a-1)a(a+1)}{1.2.3}=\frac{a(a+1)}{1.2}$$

und wenn man für a wieder der Reihe nach 1, 2, 3 ... n setzt,

$$\frac{1.2.3}{1.2.3}-0=\frac{1.2}{1.2}$$
$$\frac{2.3.4}{1.2.3}-\frac{1.2.3}{1.2.3}=\frac{2.3}{1.2}$$
$$\frac{3.4.5}{1.2.3}-\frac{2.3.4}{1.2.3}=\frac{3.4}{1.2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}-\frac{(n-1)n(n+1)}{1.2.3}=\frac{n(n+1)}{1.2}.$$

Hieraus folgt durch Addition

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}=\frac{1.2+2.3+3.4+\cdots+n(n+1)}{1.2}.$$

Mit Benutzung dieser Formel ergiebt sich nunmehr

$$8(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)=\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{3}$$

und hieraus

$$59)\quad 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

§ 5. Permutationen.

Die Zahl Z aller Permutationen von n Elementen ist

$$60)\quad Z=1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\,.n=n!$$

Zwei Elemente a und b können zwei verschiedene Permutationen bilden, nämlich ab und ba. Ein drittes Element c, das hinzutritt, kann in jeder Permutation drei verschiedene Stellen einnehmen, nämlich resp. die dritte, zweite und erste. Aus den zwei Permutationen ab und ba entstehen daher $2\,.\,3 = 1\,.\,2\,.\,3$, deren Elemente a, b, c sind, nämlich

$$abc,\quad acb,\quad cab \text{ und } bac,\quad bca,\quad cba.$$

Ein viertes Element d, das hinzutritt, lässt aus jeder dieser sechs Permutationen vier neue hervorgehen, je nachdem es an die erste, zweite, dritte, vierte Stelle tritt; für vier Elemente haben wir daher $1\,.\,2\,.\,3\,.\,4$ Permutationen u. s. w.

Sind unter den n Elementen gleiche vorhanden, und zwar α gleiche von der einen, β gleiche von einer andern Art, so ist die Zahl Z aller Permutationen

$$61)\quad Z=\frac{n!}{\alpha!\,\beta!}.$$

Nehmen wir z. B. an, dass fünf Elemente vorhanden sind, unter denen drei, resp. zwei einander gleich sind, also die Elemente $aaabb$, so wollen wir zunächst die drei Elemente a und die zwei Elemente b dadurch verschieden machen, dass wir ihnen die Indices 1, 2, 3, resp. 1, 2 anhängen. Alsdann erhalten wir fünf verschiedene Elemente, nämlich $a_1\,a_2\,a_3\,b_1\,b_2$. Die Zahl ihrer Permutationen ist $5!$ Eine von ihnen sei $a_1\,a_2\,b_1\,a_3\,b_2$. Aus ihr entstehen — sie selbst mitgerechnet — dadurch, dass wir die Elemente a_1, a_2, a_3 vertauschen, $3!$ Diese werden aber sämtlich einander gleich, wenn wir die Indices wieder tilgen; d. h. von den $5!$ werden, wenn wir a_1, a_2, a_3 durch aaa ersetzen, je $3!$ einander gleich, so dass nur noch $5!:3!$ übrig bleiben. Tilgt man nun noch die Indices von b_1 und b_2, so bleiben schliesslich nur $\frac{5!}{3!\,2!}$ verschiedene Permutationen.

§ 6. Auflösung der quadratischen Gleichung und der Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten.

Lautet die quadratische Gleichung

$$x^2+ax+b=0,$$

so haben die Wurzeln x_1 und x_2 die Werte

$$62)\quad x_1=-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$$

$$63)\quad x_2=-\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}.$$

Aus ihnen folgt durch Addition, resp. Multiplikation

$$64)\quad x_1+x_2=-a$$

$$65)\quad x_1x_2=b.$$

Setzt man diese Werte für a und b in die gegebene Gleichung ein, so ergiebt sich

$$66)\quad \begin{aligned} x^2+ax+b&=x-(x_1+x_2)x+x_1x_2, \text{ d. h.}\\ x^2+ax+b&=(x-x_1)(x-x_2).\end{aligned}$$

Hat das Glied x^2 nicht den Koeffizienten 1, lautet also die Gleichung

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,$$

so führt man ihre Lösung dadurch auf die vorstehende zurück, dass man

$$67)\quad \alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

schreibt. Sind dann die Wurzeln der Gleichung

$$x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0$$

resp. x_1 und x_2, so ist nach 66)

$$x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=(x-x_1)(x-x_2)$$

und wenn man dies in 67) einsetzt, so ergiebt sich

$$68)\quad \alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2).$$

Lauten die zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten

$$\begin{aligned} Ax+By&=C\\ A_1x+B_1y&=C_1,\end{aligned}$$

so erhält man, indem man der Reihe nach die erste mit B_1, die zweite mit $-B$ multipliziert und dann addiert, resp. die erste mit $-A_1$ und die zweite mit A,

$$69)\quad x=\frac{CB_1-C_1B}{AB_1-A_1B},\quad y=\frac{C_1A-CA_1}{AB_1-A_1B}.$$

§ 7. Formeln für Flächen und Körper.

70) Inhalt des Dreiecks (g Grundlinie, h Höhe): $\frac{1}{2} gh$.

70a) Inhalt des Dreiecks (α der von a und b eingeschlossene Winkel): $\frac{1}{2} ab \sin \alpha$.

71) Inhalt des Parallelogramms (g Grundlinie, h Höhe): gh.

71a) Inhalt des Parallelogramms (α der von a und b eingeschlossene Winkel): $ab \sin \alpha$.

72) Inhalt des Trapezes (g_1 und g_2 Grundlinien, h Höhe): $\frac{g_1 + g_2}{2} h$.

73) Umfang des Kreises (r Radius): $2r\pi$.

74) Inhalt des Kreises (r Radius): $r^2\pi$.

75) Inhalt des Kreissektors (φ Bogenzahl): $\frac{1}{2} r^2 \varphi$.

76) Inhalt der Ellipse (a und b Halbaxen): $ab\pi$.

77) Inhalt des Prismas (G Grundfläche, h Höhe): Gh.

78) Inhalt der Pyramide (G Grundfläche, h Höhe): $\frac{1}{3} Gh$.

79) Inhalt des Cylinders (r Radius, h Höhe): $r^2\pi h$.

80) Oberfläche des Cylinders (r Radius, h Höhe): $2r\pi h$.

81) Inhalt des Kegels (r Radius, h Höhe): $\frac{1}{3} r^2\pi h$.

82) Mantel des Kegels (r Radius, s Seite): $r\pi s$.

83) Mantel des Kegelstumpfs (r und ρ Radien, s Seite): $(r + \rho)\pi s$.

84) Inhalt der Kugel (r Radius): $\frac{4}{3} r^3\pi$.

85) Oberfläche der Kugel (r Radius): $4r^2\pi$.

Formeln über das reguläre Tetraëder.

Bezeichnet man die Kante des regulären Tetraëders mit a, die Höhe mit h, die Höhe einer Seitenfläche mit k, die Entfernung des Mittelpunktes von den Ecken mit r, den Winkel zweier Seitenflächen gegen einander mit φ, den Winkel, den irgend zwei der vier vom Zentrum nach den Ecken laufenden Geraden mit einander bilden, mit ψ, so bestehen folgende Relationen.

Zunächst ergiebt sich für die in der Grundfläche liegende Höhe k der Wert

$$k^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4} a^2$$

und hieraus, da die Tetraëderhöhe h durch denjenigen Punkt von k geht, der k im Verhältnis 2 : 1 teilt,

$$h^2 = a^2 - (\tfrac{2}{3}k)^2 = a^2 - \tfrac{1}{3}a^2 = \tfrac{2}{3}a^2$$

86) $h = a\sqrt{\tfrac{2}{3}}$.

Nun teilt der Mittelpunkt des Tetraëders die Höhe h im Verhältnis 3:1, also folgt

87) $$\sin\frac{\psi}{2} = \frac{1}{2}a : \frac{3}{4}h$$
$$\psi = 109^0\,28'..$$

Um den Neigungswinkel φ zu erhalten, legt man durch eine Kante a eine Ebene senkrecht zur gegenüberliegenden Kante; diese schneidet das Tetraëder in einem gleichschenkligen Dreieck mit a als Basis und k als Schenkel und φ als Winkel an der Spitze. Daher ist

88) $$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{a}{2} : k$$
$$\varphi = 70^0\ 34'.....$$

§ 8. Näherungsregeln für das Rechnen mit kleinen Grössen.

In den folgenden Formeln sind α, β, γ... im Vergleich zu 1 kleine Grössen.

89) $(1+\alpha)(1+\beta) = 1+\alpha+\beta$

90) $(1+\alpha)(1-\beta) = 1+\alpha-\beta$

91) $(1+\alpha)^2 = 1+2\alpha$

92) $\sqrt{1+\alpha} = 1+\frac{\alpha}{2}$

93) $(1+\alpha)^n = 1+n\alpha$

94) $\frac{1}{1+\alpha} = 1-\alpha$

95) $\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} = 1-\frac{\alpha}{2}$

96) $\frac{(1+\alpha)(1+\beta)}{(1+\gamma)(1+\delta)} = 1+\alpha+\beta-\gamma-\delta$

97) $e^\alpha = 1+\alpha$

98) $\ln(1+\alpha) = \alpha$

99) $\sin\alpha = \alpha$

100) $\operatorname{tg}\alpha = \alpha$

101) $\cos\alpha = 1$.

Die Formeln 89) und 90) findet man durch Ausmultiplizieren, 91) bis 101) durch Reihenentwicklung (§ 11), wobei stets die höheren Potenzen oder Produkte der kleinen Grössen neben den ersten Potenzen vernachlässigt werden.

§ 9. Die einfachen Formeln der Differentialrechnung.

102) $dx^n = nx^{n-1}dx.$

103) $d\frac{1}{x} = -\frac{dx}{x^2}, \quad d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$

104) $d\sin x = \cos x\,dx, \quad d\cos x = -\sin x\,dx.$

105) $d\,\mathrm{tg}\,x = \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad d\,\mathrm{ctg}\,x = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$

106) $d\ln x = \frac{dx}{x}.$

107) $de^x = e^x dx, \quad da^x = a^x dx \ln a.$

108) $d(u \pm v \pm w) = du \pm dv \pm dw.$

109) $d(uv) = v\,du + u\,dv.$

110) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$

111) $dF(u) = F'(u)\,du.$

§ 10. Die einfachsten Formeln der Integralrechnung.

112) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad \int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1} + C.$

113) $\int \cos x\,dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

114) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x + C.$

115) $\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$

116) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$

117) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arc\,tg}\,x.$

118) $$\int \frac{dx}{a+x} = \ln(a+x) + C.$$

119) $$\int \frac{dx}{a-x} = -\ln(a-x) + C = \ln\frac{1}{a-x} + C.$$

120) $$\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = \frac{1}{b-a}\ln\frac{b-x}{a-x} + C.$$

121) $$\int (du \pm dv) = \int du \pm \int dv.$$

122) $$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

123) $$\int a\,du = a\int du.$$

§ 11. Reihenentwicklungen.

124) $$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}f'''(0) + \cdots$$

125) $$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x) + \cdots$$

126) $$f(x-h) = f(x) - \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) - \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x) + \cdots$$

127) $$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$$

128) $$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots$$

129) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots.$$

130) $$\operatorname{tg} x = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots.$$

131) $$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots.$$

132) $$\ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots.$$

133) $$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \ldots\right)$$

134) $\operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \ldots .$

135) $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots$

136) $(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 \ldots .$

137) $(1-x)^n = 1 - \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 \ldots .$

Sachregister.

Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten.

A.

Abkühlungsgeschwindigkeit 130.
Ableitung 84.
— höhere 164.
Abscisse 4.
Annäherungsmethode zur Lösung numerischer Gleichungen 247.
Anziehung eines Stabes 126.
— zweier Stäbe auf einander 162.
Arbeitsleistung der Gase 133.
Ausdehnungskoeffizient 48.
— planarer und kubischer 179.
Ausschläge, Korrektion von 225.

B.

Barometerstand, Reduktion auf 0° 223.
Beschleunigung 107, 167.
Binomische Reihe 209.
Binomischer Lehrsatz 58.
Boyle-Mariotte'sches Gesetz 1, 32.
Brechungsgesetz 234.
Brennpunktseigenschaften der Ellipse 187.
— der Parabel 184.

C.

Cosinus, Definition des 61.
— Differentialquotient 65.
Cotangente, Definition der 61.
— Differentialquotient 72.

D.

Dämpfungsverhältnis einer Schwingung 274.
Dekrement, logarithmisches 274.
Differential 82.
Differential, höheres 171.
— totales 174.
Differentialquotient 49.
— der Summe und Differenz 67.
— des Produkts 69.
— des Quotienten 70.
— einzelner Funktionen, siehe diese.
— höherer 165.
— partieller 174.
— höherer partieller 182.
Differentiation empirisch gegebener Funktionen 256.
— unentwickelter Funktionen 183.
Dissoziationsisotherme 34.
Divergenz einer Reihe 193.
Doppelintegral 160.

E.

Ellipse 20.
— Axen der 22.
— Brennpunkte der 22, 188.
— Directrix der 24.
— Fläche der 152.
— Gleichung in Polarkoordinaten 36.
— Normale der 187.
— Scheitel der 22.
— Tangente der 187.
Erkaltungsgesetz von Newton 129, 160.
Esterbildung 142.
Exponentialfunktion 79.

F.

Fallgesetze 45, 97, 107.
Fehlerrechnung 240.
Flächendifferential 149.

Flächenelement 161.
Flamme, Maximaltemperatur der 131.
Funktion 52, 172.

G.

Gasmoleküle, mittlere Weglängen der 275.
Gay-Lussac'sches Gesetz 15.
Gedämpfte Schwingungen 268.
Gerade Linie, Gleichung der 11.
Geschwindigkeit 45.
Gleichseitige Hyperbel 27.
Gleichung, algebraische 245.
— transcendente 254.
Graphische Darstellung 1.
Grenzwert 50.
Guldberg-Waage'sches Gesetz 99.

H.

Hyperbel 24.
— Asymptoten der 29, 189.
— Axen der 26.
— Brennpunkte der 26.
— Directrix der 27.
— Fläche der 154.
— gleichseitige 27.
— Gleichung in Polarkoordinaten 36.
— Scheitel der 26.
Hyperbolische Logarithmen 154.
Hypsometrische Formel 128, 160.
— vereinfachte 223.

I.

Integral 100.
— bestimmtes 151.
Integration durch Reihen 211.
— empirisch gegebener Funktionen 261.
— teilweise 111.
Integrationskonstante 105.
Inversion des Rohrzuckers 99, 109, 159.

K.

Körperelement 162.
Kometenbahnen 37.
Kompressibilität eines Gases 72.
Konkavität einer Kurve 170.
Konvergenz der Reihen 193.
Konvexität einer Kurve 170.
Koordinaten 3.
Koordinaten, Transformation der 29.
Korrektion von Ausschlägen 225.
Kreisgleichung 7.
Kugelinhalt 155.

L.

Laktonbildung 140.
Logarithmen 73.
— Differentialquotient des 77.
— natürliche 76.
Logarithmisches Dekrement 274.

M.

Magnetische Schwingungen 268, 274.
Magnetisierungsfähigkeit 52.
Mariotte-Boyle'sches Gesetz 1.
Massenwirkungsgesetz 137, 139.
Maxima und Minima 227.
Maximaltemperatur einer Flamme 131.
Modulus des Logarithmensystems 78.

N.

Normale der Ellipse 187.
— der Parabel 186.

O.

Ordinate 4.
Oscillationsbewegung 168.

P.

Parabel 6, 9.
— Brennpunkt der 10, 186.
— Directrix der 10.
— Fläche der 144.
— Gleichung in Polarkoordinaten 36.
— Normale der 186.
— Scheitel der 185.
— Tangente der 186.
Partialbrüche 118.
Polarkoordinaten 35.
Potenz 59.
— Differentialquotient der 60.
— für beliebige Exponenten 87.

R.

Reaktionsgeschwindigkeit 51, 100.
Reaktionsverlauf unvollständiger Reaktionen 139.

Reaktionsverlauf vollständiger Reaktionen 137.
Rechnen mit kleinen Grössen 222.
Reduktion des Barometerstandes auf 0° 223.
Reflexionsgesetz 232.
Reihe, binomische 209.
— für arc sin x 214.
— für arc tg x 213.
— für cos x und sin x 203.
— für e 75, 198.
— für e^x 202.
— für π 213.
— für tg x 210.
— geometrische 193.
— logarithmische 207.
— von Leibniz 213.
— von MacLaurin 200.
— von Taylor 205.
Rotationsparaboloid 156.

S.

Schwingungsbewegung 169, 265.
— gedämpfte 268.
Sinus, Definition des 71.
— Differentialquotient des 63.
— -Kurve 65.
Spezifische Wärme 52.
Spirale des Archimedes 37.
Stetigkeit 92.
Superposition kleinster Wirkungen 174.

T.

Tangens, Definition von 61.
— Differentialquotient von 71.
Tangente einer Kurve 55.
Temperaturfunktion 132.
Temperaturkoeffizient 52.
Transformation der Koordinaten 29.
Trigonometrische Funktionen 60.

U.

Unbestimmte Werte 215.
Unstetigkeit 92.
Unvollständig verlaufende Reaktionen 139.

V.

Variabele 53.
Veränderung der Reaktionswärme 281.
Verdünnungswärme der Schwefelsäure 281.
Vollständig verlaufende Reaktionen 137.
Volumelement 162.

W.

van der Waal'sche Gleichung 31.
Wärmeintensität, Minimum der 235.
Wärmesatz, erster 280.
Weglänge, mittlere, der Molekülе 275.
Wendepunkte 170, 229.
Wurzeln einer Gleichung 247.

Z.

Zuckerinversion 99, 109, 159.

In gleichem Verlage erschienen:

Lehrbuch der Botanik.

Von

Dr. K. Giesenhagen

Dozent der Botanik a. d. Universität München, kgl. Kustos am pflanzen-physiol. Institut.

21 Bogen gr. 8° mit 310 Abbildungen.

Brosch. Mk. 8.—, eleg. geb. Mk. 9.20.

Warm empfohlen von

Geh.-Rat Prof. Dr. **v. Sachs**-Würzburg, Prof. Dr. **Göbel**-München, Prof. Dr. **Magnus**-Berlin, Prof. Dr. **Cohn**-Breslau u. a.

Der leitende Gedanke des Verfassers war, „den botanischen Lehrstoff, soweit er zum Gegenstande einer Universitätsprüfung gemacht werden kann, in übersichtlicher Gruppierung darzubieten". Und das ist ihm auch vorzüglich gelungen.

Münch. Allgem. Zeitung.

Das Buch will einen Ersatz für das botanische Kollegienheft bieten. In diesem Bestreben hat das schön ausgestattete Werk, bei dessen Bearbeitung auch Professor Göbel mit Rat und That wirkte, unter all den vielen Lehrbüchern der Botanik keinen Konkurrenten.

Naturae novitates.

Die Darstellung ist durchweg eine kurze, präzise und klare. Ueberall ist den neuesten Ergebnissen und Anschauungen der Wissenschaft aufs gewissenhafteste Rechnung getragen. Der Verfasser hat seine Aufgabe aufs vollkommenste gelöst. Das Buch kann daher allen denen, die die Botanik nach dem heutigen Standpunkte der Wissenschaft lernen wollen, warm empfohlen werden.

Prof. Dr. Magnus-Berlin.

ERRATA.

S. 4	Z. 4	OR statt OQ.
S. 4	Z. 7 von unten	$+2{,}5$, $+3{,}5$ statt $+2{,}5$, $+2{,}5$.
S. 5	Z. 6 von unten	$+5{,}5$ statt $-5{,}5$.
S. 10	Z. 18	§ 8 statt § 2.
S. 14	Z. 12	$\operatorname{tg}\alpha$ statt b.
	Z. 13	b statt $\operatorname{tg}\alpha$.
		63^0 statt 68^0.
S. 82	Z. 3 von unten	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ statt $\frac{\Delta x}{\Delta y}$.
S. 82	Z. 10	$\cos^2 y$ statt $\cos^2 x$.
		$\sin^2 y$ statt $\sin^2 x$.
	Z. 12 und 13	y statt x.
S. 85	Z. 1 von unten	$-2a\,dx$ statt $-2x\,dx$.
S. 88	Z. 5 von unten	$-\frac{n\,a\,dx}{x^{n+1}}$ statt $-\frac{a\,dx}{x^{n+1}}$.
S. 88	Z. 10 von unten	$\frac{2\,dx}{3\sqrt[3]{x}}$ statt $\frac{2\,dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$.
S. 94		Die Dampfdruckkurve steigt oberhalb des Schmelzpunktes nicht *beschleunigt*, sondern *verlangsamt* an; Text und Figur sind darnach umzuändern.
S. 125	Z. 8	$a\int dx$ statt $\alpha\int dx$.
S. 237	Z. 4	$(a-2x)(b-2x)$ statt $(a-x)(b-x)$.
		Dieser Fehler ist auch in den folgenden Zeilen zu verbessern.
S. 284	Z. 5 von unten	$\sqrt{1+x^2}-x$ statt $\sqrt{1+x^2-x}$.
S. 285	Z. 10	$2a^2x$ statt $2a^2x\,dx$.
	Z. 2 von unten	$\sin(au+b)$ statt $\sin au+b$.
S. 295	Z. 9 von unten	$a:b$ statt $a-b$.

NOV 1936

AUG 21

FEB 8

APR 25 1936

SEP 23

DUE MAY 25 '36